Beitrag zur Theorie der Renten, die in unterjährigen Raten entrichtbar sind

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT BERN

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

JOHANN MEIER

von **Niederbipp** (Bern)

Von der philosophischen Fakultät auf Antrag des Herrn Prof. Dr. Chr. Moser angenommen.

Bern, den 21. Juni 1918.

Prof. Dr. **Kohlschütter,**
Dekan.

ZÜRICH ◻ 1930.
Diss.-Druckerei A.-G. Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64.

Beitrag zur Theorie der Renten, die in unterjährigen Raten entrichtbar sind.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT BERN

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

JOHANN MEIER

von **Niederbipp** (Bern)

Von der philosophischen Fakultät auf Antrag des Herrn Prof. Dr. Chr. Moser angenommen.

Bern, den 21. Juni 1918.

Prof. Dr. **Kohlschütter,**
Dekan.

ZÜRICH □ 1930.
Diss.-Druckerei A.-G. Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
Allgemeine Erläuterungen und Bezeichnungen, sowie Aufzählung der verschiedenen Fälle		7
Abschnitt A:	Nachschußweise zahlbare Leibrenten	11
„ B:	Vorschußweise zahlbare Leibrenten	27
„ C:	Zusammenhang zwischen den Formeln für nachschußweise und vorschußweise zahlbare Leibrenten	43
„ D:	Eulersche Summenformel und Parabelfunktionen	47
„ E:	Reihenentwicklungen	55
„ F:	Tabellen	66
Literaturverzeichnis		71

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549620_0058

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit wurde angeregt durch die Vorlesung, die Herr Professor Dr. Chr. Moser im Sommersemester 1916 über denselben Gegenstand gehalten hat. Ich erfülle eine angenehme Pflicht, wenn ich an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer für das mir während meiner Studien bewiesene Wohlwollen und den mir bei der Ausarbeitung dieser Untersuchungen gewährten Rat und Beistand meinen herzlichsten Dank ausspreche.

Der Verfasser.

Allgemeine Erläuterungen und Bezeichnungen, sowie Aufzählung der verschiedenen Fälle.

Wir beschränken uns in den nachfolgenden Untersuchungen auf die theoretisch und praktisch wichtigsten Renten, nämlich die Leibrenten.

Unter Leibrente wird eine, in regelmäßiger Wiederkehr, ein oder mehrmals im Jahre fällig werdende Summe verstanden, deren Auszahlung an die Voraussetzung geknüpft ist, daß der Rentenberechtigte den Tag des Verfalles erlebt. Leibrenten, die aus öffentlichen oder privaten Fürsorgeeinrichtungen entspringen und an Invalide, Alte, Witwen und Waisen ausgerichtet werden, heißen vielfach Pensionen. Der Anspruch auf eine Leibrente kann auch bei einer Lebensversicherungsgesellschaft, gegen einmalige Kapitaleinzahlung oder gegen Entrichtung von Prämien erworben werden.

Man unterscheidet sofort beginnende und aufgeschobene, ferner lebenslängliche und temporäre Leibrenten; diese Begriffe verstehen sich von selbst.

Je nachdem die erste Rente am Anfang oder am Ende der ersten Rentenverfallsperiode entrichtbar ist, heißt die Leibrente eine vorschußweise oder eine nachschußweise zahlbare Leibrente.

Da die Dauer der Rentenauszahlung vom Leben und Sterben des Rentenberechtigten abhängt, so bildet die Theorie der Leibrenten einen Bestandteil der Lebensversicherungsmathematik. Die Aufgabe, die es zu lösen gilt, besteht in der Berechnung des Gegenwartswertes (Barwertes) einer Leibrente. Dabei ist auf geeignete Rechnungsgrundlagen, bestehend in einer Sterbetafel und einem technischen Zinsfuß abzustellen.

Die nachfolgenden Untersuchungen handeln vor allem vom Barwert der in unterjährigen Raten zahlbaren Leibrenten. Von diesen sind für die Praxis die halbjährlich, vierteljährlich und monatlich zahlbaren Leibrenten die wichtigsten. Je größer die Zahl der in ein Jahr fallenden Rentenraten ist, um so mehr nähert sich die Leibrente der für die Theorie bedeutungsvoll gewordenen kontinuierlichen Leibrente.

Der Umstand, daß die Sterbetafeln im allgemeinen auf der Grundlage von jährlichen Beobachtungsperioden abgeleitet sind und dementsprechend auch nur für jährliche Altersintervalle Angaben enthalten, ruft einer besonderen Theorie, die es gestattet, den Barwert der unterjährig zahlbaren Renten auf Grund dieser „unvollständigen" Sterbetafeln zu berechnen. Dabei lassen sich verschiedene Fälle unterscheiden.

Um die Aufzählung dieser Fälle zu vereinfachen, mögen folgende Bezeichnungen vorausgeschickt werden:

l_x Zahl der Lebenden vom Alter x gemäß Sterbetafel. Die Bedeutung von l_x geht am einfachsten aus dem Hinweis hervor, daß von l_x im Alter x lebenden Personen im Alter $(x+n)$ noch l_{x+n} Personen am Leben sind.

μ_x Sterbeintensität im Alter x.

Zwischen μ_x und l_x bestehen folgende Beziehungen:

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{d\,l_x}{d\,x} = -\frac{d\,Log\,l_x}{d\,x}$$

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = e^{-\int_0^n \mu_{x+t}\,d\,t} = {}_np_x$$

Dabei bedeuten:

$\frac{d\,l_x}{d\,x}$ die erste Ableitung der Funktion l_x nach x

$Log\,l_x$ den natürlichen Logarithmus von l_x

${}_np_x$ die Wahrscheinlichkeit für eine Person vom Alter x nach n Jahren noch am Leben zu sein.

Es gelten ferner die Bezeichnungen:

i Zins des Kapitals 1 in einem Jahr (technischer Zins).

$d = \frac{i}{1+i}$ · Diskont des Kapitals 1 in einem Jahr.

$r = 1 + i$ Aufzinsungsfaktor für ein Jahr.

$v = 1 - d$ Diskontierungsfaktor für ein Jahr.

$\delta = -\frac{d\,Log\,v^x}{d\,x} = Log\,(1+i)$ Zinsintensität.

$i_{(m)} = m\left[r^{\frac{1}{m}} - 1\right]$ nomineller Zinsfuß entsprechend dem reellen Zinsfuß i, auf der Grundlage von m Verzinsungsperioden im Jahr. [1])

$f_{(m)} = m\left[1 - v^{\frac{1}{m}}\right]$ nomineller Diskontsatz entsprechend dem reellen Diskontsatz d, auf der Grundlage von m Diskontierungsperioden im Jahr.[1])

$D_x = v^x l_x$ Zahl der diskontierten Lebenden vom Alter x gemäß Sterbetafel.

$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots\cdots$ (bis zum Schluß der Sterbetafel) Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden.

${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$ Barwert der um n Jahre aufgeschobenen Erlebensfallsumme 1 für eine Person vom Alter x.

$D_x' = \frac{d\,D_x}{d\,x}$ erste Ableitung der Funktion D_x nach x.

Für die erste Ableitung der Funktion D_x nach x ergibt sich leicht folgende Darstellung:

$$D_x' = D_x \frac{d\,Log\,D_x}{d\,x} = D_x\left[\frac{d\,Log\,l_x}{d\,x} + \frac{d\,Log\,v^x}{d\,x}\right] = -\,D_x\,(\mu + \delta)$$

Auf Grund der Methode der einfachen Verzinsung gilt für den auf die Zeit τ entfallenden Zins des Kapitals 1 die Formel $\tau\,i$
und für den Diskont gilt entsprechend die Formel $\tau\,d$

Auf Grund der Exponentialmethode gilt für den auf die Zeit τ entfallenden Zins des Kapitals 1 die Formel $r^\tau - 1$
und für den Diskont gilt entsprechend die Formel $1 - v^\tau$.

[1]) Vergl. Text Book Part I Chapter I; Formeln (2) und (6).

Wir betrachten folgende Fälle:

Fall I. Die Funktion $D_{x+\tau}$ verläuft innerhalb eines Jahres linear.

Fall II. Die Funktion $l_{x+\tau}$ verläuft innerhalb eines Jahres linear. Zins und Diskont werden für den Bruchteil eines Jahres nach der Methode der einfachen Verzinsung berechnet.

Fall III. Die Funktion $l_{x+\tau}$ verläuft innerhalb eines Jahres linear. Zins und Diskont werden für den Bruchteil eines Jahres nach der Exponentialmethode berechnet.

Fall IV. Die Sterbetafel ist nach einem analytischen Gesetz ausgeglichen. Die Funktion $D_{x+\tau}$ wird im Intervall (x) bis $(x+1)$ als eine Parabel dritten Grades aufgefaßt, die für (x) und $(x+1)$ gleiche Funktionswerte und gleiche erste Ableitungen (gleiche Tangenten) besitzt wie die durch die Sterbetafel gegebene Funktion.

Fall V. Die Funktion $D_{x+\tau}$ wird im Intervall $(x-1)$ bis $(x-2)$ als eine Parabel dritten Grades aufgefaßt, die für $(x-1)$, (x), $(x+1)$ und $(x+2)$ gleiche Funktionswerte besitzt wie die durch die Sterbetafel gegebene Funktion.

Fall VI. Die Funktion $l_{x+\tau}$ wird im Intervall $(x-1)$ bis $(x+2)$ als eine Parabel dritten Grades aufgefaßt, die für $(x-1)$, (x), $(x+1)$ und $(x+2)$ gleiche Funktionswerte besitzt wie die durch die Sterbetafel gegebene Funktion. Zins und Diskont werden für den Bruchteil eines Jahres nach der Methode der einfachen Verzinsung berechnet.

Fall VII. Die Funktion $l_{x+\tau}$ wird im Intervall $(x-1)$ bis $(x+2)$ als eine Parabel dritten Grades aufgefaßt, die für $(x-1)$, (x), $(x+1)$ und $(x+2)$ gleiche Funktionswerte besitzt wie die durch die Sterbetafel gegebene Funktion. Zins und Diskont werden für den Bruchteil eines Jahres nach der Exponentialmethode berechnet.

Abschnitt A.

Nachschußweise zahlbare Leibrenten.

Bei einer nachschußweise während n Jahren, jedes $\frac{1}{m}$ Jahr mit dem Betrage $\frac{1}{m}$ zahlbaren Leibrente wird spätestens nach n Jahren die letzte $\frac{1}{m}$ Rente fällig.

Es mögen folgende Abkürzungen gelten:

$$^{(m)}D_{x+1} = \frac{1}{m}\left[D_{x+\frac{1}{m}} + D_{x+\frac{2}{m}} + \cdots\cdots + D_{x+\frac{m}{m}}\right]$$

$$^{(m)}N_{x+1} = {}^{(m)}D_{x+1} + {}^{(m)}D_{x+2} + {}^{(m)}D_{x+3} + \cdots\cdots \text{ (bis zum Schluß der Tafel)}$$

Alsdann gilt für den Barwert der nachschußweise während n Jahren, jedes $\frac{1}{m}$ Jahr mit dem Betrage $\frac{1}{m}$ zahlbaren Leibrente die Formel:

$$^{(m)}a_{x\overline{n}|} = \frac{{}^{(m)}N_{x+1} - {}^{(m)}N_{x+n+1}}{D_x} \tag{1}$$

Im Falle von jährlicher Rentenzahlung ($m = 1$) lautet die Formel für den Barwert der während n Jahren nachschußweise zahlbaren Leibrente wie folgt:

$$a_{x\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \tag{2}$$

Formel (1) kann in dieser Form im allgemeinen nicht zur Berechnung des Barwertes der unterjährigen Renten verwendet werden. Die Unterscheidung der eingangs erläuterten Fälle I bis VII, gestattet die Ableitung verschiedener brauchbarer Formeln, die alle auf folgende allgemeine Form gebracht werden können:

$$^{(m)}a_{x\overline{n}|} = g\, a_{x\overline{n}|} + k(1 - {}_nE_x) + {}_nK_x \tag{3}$$

Fall I.

Die Funktion $D_{x+\tau}$ verläuft innerhalb eines Jahres linear. Es gilt die Ausgangsgleichung:

$$D_{x+\frac{\lambda}{m}} = \frac{m-\lambda}{m} D_x + \frac{\lambda}{m} D_{x+1} \tag{4}$$

Für ${}^{(m)}D_{x+1}$ folgt daraus die Darstellung:

$${}^{(m)}D_{x+1} = \frac{1}{m} \left\{ \begin{array}{l} \frac{m-1}{m} D_x + \frac{1}{m} D_{x+1} \\ \frac{m-2}{m} D_x + \frac{2}{m} D_{x+1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{1}{m} D_x + \frac{m-1}{m} D_{x+1} \\ \cdot + \frac{m}{m} D_{x+1} \end{array} \right\} \tag{5}$$

Es ergeben sich auf Grund dieser Darstellung die nachfolgenden Formeln:

$${}^{(m)}D_{x+1} = \frac{m-1}{2m} D_x + \frac{m+1}{2m} D_{x+1} \tag{6}$$

$${}^{(m)}N_{x+1} = N_{x+1} + \frac{m-1}{2m} D_x \tag{7}$$

$${}^{(m)}a_{\overline{x|}} = a_{\overline{x|}} + \frac{m-1}{2m} (1 - {}_nE_x) \tag{8}$$

$$\left. \begin{array}{l} g = 1 \\ k = \frac{m-1}{2m} \\ {}_nK_x = 0 \end{array} \right\} \tag{9}$$

Fall II.

Die Funktion $l_{x+\tau}$ verläuft innerhalb eines Jahres linear. Zins und Diskont werden für den Bruchteil eines Jahres nach der Methode der einfachen Verzinsung berechnet.

Bei der Berechnung von $D_{x+\frac{\lambda}{m}}$ wird die Zahl der Lebenden $l_{x+\frac{\lambda}{m}}$ zunächst nach der Methode der einfachen Zinsen bis zum Ende des Jahres aufgezinst und alsdann nach der Exponentialmethode bis zum Alter Null zurückdiskontiert.

Es gilt die Ausgangsgleichung:

$$D_{x+\frac{\lambda}{m}} = v^{x+1}\left(1+\frac{m-\lambda}{m}\,i\right)\left(\frac{m-\lambda}{m}\,l_x+\frac{\lambda}{m}\,l_{x+1}\right) \qquad (10)$$

Für ${}^{(m)}D_{x+1}$ folgt daraus die Darstellung:

$${}^{(m)}D_{x+1} = \frac{v^{x+1}}{m}\left\{\begin{array}{l}\left(1+\frac{m-1}{m}\,i\right)\left(\frac{m-1}{m}\,l_x+\frac{1}{m}\,l_{x+1}\right)\\ \left(1+\frac{m-2}{m}\,i\right)\left(\frac{m-2}{m}\,l_x+\frac{2}{m}\,l_{x+1}\right)\\ \vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\ \left(1+\frac{1}{m}\,i\right)\left(\frac{1}{m}\,l_x+\frac{m-1}{m}\,l_{x+1}\right)\\ (1)\qquad\qquad\left(\quad\cdot\quad+\frac{m}{m}\,l_{x+1}\right)\end{array}\right\} \qquad (11)$$

Mit Verwendung der Summenformeln:

$$\frac{1}{m^2}[1+2+\cdots\cdots(m-1)] = \frac{m-1}{2m} \qquad (12)$$

$$\frac{1}{m^3}[1+2^2+\cdots\cdots(m-1)^2] = \frac{(m-1)(2m-1)}{6m^2} \qquad (13)$$

ergeben sich auf Grund der Darstellung (11) folgende Formeln:

$${}^{(m)}D_{x+1} = \left(\frac{m-1}{2m}-\frac{m^2-1}{6m^2}\,d\right)D_x+\left(\frac{m+1}{2m}+\frac{m^2-1}{6m^2}\,i\right)D_{x+1} \qquad (14)$$

$${}^{(m)}N_{x+1} = \left(1+\frac{m^2-1}{6m^2}\,i\,d\right)N_{x+1}+\left(\frac{m-1}{2m}-\frac{m^2-1}{6m^2}\,d\right)D_x \qquad (15)$$

$${}^{(m)}a_{x\overline{n}|} = \left(1+\frac{m^2-1}{6m^2}\,i\,d\right)a_{x\overline{n}|}+\left(\frac{m-1}{2m}-\frac{m^2-1}{6m^2}\,d\right)(1-{}_nE_x) \qquad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} g &= 1 + \frac{m^2-1}{6\,m^2}\,i\,d \\ k &= \frac{m-1}{2\,m} - \frac{m^2-1}{6\,m^2}\,d \\ {}_nK_x &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Fall III.[1])

Die Funktion $l_{x+\tau}$ verläuft innerhalb eines Jahres linear. Zins und Diskont werden für den Bruchteil eines Jahres nach der Exponentialmethode berechnet.

Bei der Berechnung von $D_{x+\frac{\lambda}{m}}$ wird die Zahl der Lebenden $l_{x+\frac{\lambda}{m}}$ zunächst nach der Exponentialmethode bis zum Ende des Jahres aufgezinst und dann bis zum Alter Null zurückdiskontiert.

Es gilt die Ausgangsgleichung:

$$D_{x+\frac{\lambda}{m}} = v^{x+1}\,(1+i)^{\frac{m-\lambda}{m}}\left(\frac{m-\lambda}{m}\,l_x + \frac{\lambda}{m}\,l_{x+1}\right) \qquad (18)$$

Für ${}^{(m)}D_{x+1}$ folgt daraus die Darstellung:

$${}^{(m)}D_{x+1} = \frac{v^{x+1}}{m}\left\{\begin{array}{l} (1+i)^{\frac{m-1}{m}}\left(\frac{m-1}{m}\,l_x + \frac{1}{m}\,l_{x+1}\right) \\ (1+i)^{\frac{m-2}{m}}\left(\frac{m-2}{m}\,l_x + \frac{2}{m}\,l_{x+1}\right) \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ (1+i)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{m}\,l_x + \frac{m-1}{m}\,l_{x+1}\right) \\ (1) \qquad\quad \left(\quad\cdot\quad + \frac{m}{m}\,l_{x+1}\right) \end{array}\right\} \qquad (19)$$

Mit Verwendung der Summenformeln:

$$\frac{1}{m}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + (1+i)^{\frac{2}{m}} + \cdots + (1+i)^{\frac{m-1}{m}}\right] = \frac{1+i}{j_{(m)}} - \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}}{j_{(m)}} \qquad (20$$

$$\frac{1}{m^2}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + 2\,(1+i)^{\frac{2}{m}} + \cdots + (m-1)\,(1+i)^{\frac{m-1}{m}}\right] = -\frac{i}{j^2_{(m)}}\,(1+i)^{\frac{1}{m}} + \frac{1+i}{j_{(m)}} \qquad (21$$

[1]) Die für diesen Fall abgeleiteten Formeln wurden im Jahre 1864 erstmals von R. Lobatto in den Amsterdam. Verh. 10 veröffentlicht.

wo $j_{(m)}$ den nominellen Zinsfuß bedeutet, nämlich $j_{(m)} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right]$
ergeben sich auf Grund der Darstellung (19) folgende Formeln:

$$^{(i)}D_{x+1} = \left(\frac{1}{j_{(m)}} - \frac{d}{j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}}\right) D_x + \left(\frac{i}{j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{j_{(m)}}\right) D_{x+1} \qquad (22)$$

$$^{(i)}N_{x+1} = \frac{i\,d}{j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}}\, N_{x+1} + \left[\frac{1}{j_{(m)}} - \frac{d}{j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}}\right] D_x \qquad (23)$$

$$^{(m)}a_{x\overline{n}|} = \frac{i\,d}{j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}}\, a_{x\overline{n}|} + \left[\frac{1}{j_{(m)}} - \frac{d}{j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}}\right](1-{}_nE_x) \qquad (24)$$

$$\left.\begin{aligned} g &= \frac{i\,d}{j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}} \\ k &= \frac{1}{j_{(m)}} - \frac{d}{j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}} \\ {}_nK_x &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (25)$$

Im Abschnitt E (Reihenentwicklungen) werden für g und k Reihen abgeleitet, deren Glieder nach Potenzen von i steigen.

Die Reihendarstellungen lauten wie folgt:

$$g = 1 + \frac{m^2-1}{12\,m^2}\,i^2 - \frac{m^2-1}{12\,m^2}\,i^3 + \frac{(m^2-1)(19\,m^2-1)}{240\,m^4}\,i^4 - \frac{(m^2-1)(9\,m^2-1)}{120\,m^4}\,i^5 + - \cdots\cdots$$

$$k = \frac{m-1}{2\,m} - \frac{m^2-1}{6\,m^2}\,i + \frac{m^2-1}{8\,m^2}\,i^2 - \frac{(m^2-1)(19\,m^2-1)}{180\,m^4}\,i^3 + \frac{(m^2-1)(9\,m^2-1)}{96\,m^4}\,i^4 - \frac{(m^2-1)(863\,m^4-145\,m^2+2)}{10\,080\,m^6}\,i^5 + - \cdots\cdots$$

Fall IV.

Die Sterbetafel ist nach einem analytischen Gesetz ausgeglichen. Die Funktion $D_{x+\tau}$ wird im Intervall (x) bis $(x+1)$ als eine Parabel dritten Grades aufgefaßt, die für (x) und $(x+1)$ gleiche Funktionswerte und gleiche erste Ableitungen (gleiche Tangenten) besitzt wie die durch die Sterbetafel gegebene Funktion.

Es gilt die Ausgangsgleichung:

$$D_{x+\tau} = a_0 + a_1\,\tau + a_2\,\tau^2 + a_3\,\tau^3 \qquad (26)$$

Die erste Ableitung nach τ lautet wie folgt:

$$D'_{x+\tau} = a_1 + 2\,a_2\,\tau + 3\,a_3\,\tau^2 \tag{27}$$

Wird in den Gleichungen (26) und (27) für τ das eine Mal der Wert 0 und das andere Mal der Wert 1 eingesetzt, so ergeben sich 4 Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3. Die Lösungen lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} a_0 &= D_x \\ a_1 &= \quad D'_x \\ a_2 &= -3\,D_x - 2\,D'_x + 3\,D_{x+1} - D'_{x+1} \\ a_3 &= \quad 2\,D_x + D'_x - 2\,D_{x+1} + D'_{x+1} \end{aligned} \tag{28}$$

Für ${}^{(m)}D_{x+1}$ ergibt sich die Darstellung:

$${}^{(m)}D_{x+1} = \frac{1}{m}\left\{\begin{array}{l} a_0 + \left(\frac{1}{m}\right) a_1 + \left(\frac{1}{m}\right)^2 a_2 + \left(\frac{1}{m}\right)^3 a_3 \\ a_0 + \left(\frac{2}{m}\right) a_1 + \left(\frac{2}{m}\right)^2 a_2 + \left(\frac{2}{m}\right)^3 a_3 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_0 + \left(\frac{m}{m}\right) a_1 + \left(\frac{m}{m}\right)^2 a_2 + \left(\frac{m}{m}\right)^3 a_3 \end{array}\right\} \tag{29}$$

Mit Verwendung der Summenformeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2}(1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + m) &= \frac{m+1}{2\,m} \\ \frac{1}{m^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + m^2) &= \frac{(2\,m+1)\,(m+1)}{6\,m^2} \\ \frac{1}{m^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + m^3) &= \frac{(m+1)^2}{4\,m^2} \end{aligned} \tag{30}$$

und unter Berücksichtigung der Gleichungen (28) und (29) ergibt sich für ${}^{(m)}D_{x+1}$ folgende Darstellung:

$${}^{(m)}D_{x+1} = \left\{\begin{array}{ll} (1) & (\ D_x \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\ ) \\ \frac{m+1}{2\,m} & (\ \cdot \quad D'_x \quad \cdot \quad \cdot\ ) \\ \frac{(2\,m+1)\,(m+1)}{6\,m^2} & (-3\,D_x - 2\,D'_x + 3\,D_{x+1} - D'_{x+1}) \\ \frac{(m+1)^2}{4\,m^2} & (\ 2\,D_x + D'_x - 2\,D_{x+1} + D'_{x+1}) \end{array}\right\} \tag{31}$$

Es folgen daraus die Formeln:

$$^{(m)}D_{x+1} = \frac{m-1}{2m} D_x + \frac{m^2-1}{12m^2} D'_x + \frac{m+1}{2m} D_{x+1} - \frac{m^2-1}{12m^2} D'_{x+1} \quad (32)$$

$$^{(m)}N_{x+1} = N_{x+1} + \frac{m-1}{2m} D_x + \frac{m^2-1}{12m^2} D'_x \quad (33)$$

$$^{(m)}a_{x\overline{n}|} = a_{x\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) + \frac{m^2-1}{12m^2} \varepsilon_x \left[1 - {}_nE_x \frac{\varepsilon_{x+n}}{\varepsilon_x}\right] \quad (34)$$

wo $\varepsilon_x = \dfrac{D'_x}{D_x}$

Die Funktion D'_x wird in den Sterbetafeln nicht aufgeführt. Dagegen enthalten die nach einem analytischen Gesetz hergestellten Sterbetafeln meist die Sterbeintensität μ_x, welche wie folgt definiert ist:

$$\mu_x = -\frac{d}{dx} Log\, l_x$$

Hier bedeutet $Log\, l_x$ den natürlichen Logarithmus von l_x. Auf Grund der Formel:

$$D'_x = D_x \frac{d}{dx} Log\, D_x$$

und mit Verwendung der Formel für die Zinsintensität:

$$\delta = -\frac{d}{dx} Log\, v^x$$

ergeben sich die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} D'_x &= -D_x(\mu_x + \delta) \\ \varepsilon_x &= -(\mu_x + \delta) \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Die Formel (34) läßt sich nunmehr wie folgt schreiben:

$$^{(m)}a_{x\overline{n}|} = a_{x\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) \quad \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x+\delta)\left[1 - {}_nE_x \frac{\mu_{x+n}+\delta}{\mu_x+\delta}\right] \quad (36)$$

$$\left.\begin{aligned} g &= 1 \\ k &= \frac{m-1}{2m} \\ {}_nK_x &= -\frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x+\delta)\left[1 - {}_nE_x \frac{\mu_{x+n}+\delta}{\mu_x+\delta}\right] \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Diese Schlußformeln wurden im Jahre 1869 erstmals von W. S. B. Woolhouse im Journal inst. act., Band XI, veröffentlicht. Woolhouse leitete aber die Formeln auf einem anderen Wege ab, nämlich mit Verwendung der Eulerschen Summenformel. (Vergl. Abschnitt D.)

Fall V.

Die Funktion $D_{x+\tau}$ wird im Intervall $(x-1)$ bis $(x+2)$ als eine Parabel dritten Grades aufgefaßt, die für $(x-1)$, (x), $(x+1)$ und $(x+2)$ gleiche Funktionswerte besitzt wie die durch die Sterbetafel gegebene Funktion.

Gemäß Annahme gelten:

a) die allgemeine Gleichung:

$$D_{x+\tau} = b_0 + b_1 \tau + b_2 \tau^2 + b_3 \tau^3 \tag{38}$$

b) die besonderen Gleichungen:

$$\begin{aligned} D_x &= b_0 \\ D_{x-1} &= b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \\ D_{x+1} &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \\ D_{x+2} &= b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 \end{aligned} \tag{39}$$

Die Gleichungen (39) dienen zur Bestimmung der Koeffizienten b_0, b_1, b_2 b_3. Die Lösungen lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} b_0 &= D_x \\ b_1 &= -\frac{1}{3} D_{x-1} - \frac{1}{2} D_x + D_{x+1} - \frac{1}{6} D_{x+2} \\ b_2 &= \frac{1}{2} D_{x-1} - D_x + \frac{1}{2} D_{x+1} \\ b_3 &= -\frac{1}{6} D_{x-1} + \frac{1}{2} D_x - \frac{1}{2} D_{x+1} + \frac{1}{6} D_{x+2} \end{aligned} \tag{40}$$

Für ${}^{(m)}D_{x+1}$ ergibt sich die Darstellung:

$${}^{(m)}D_{x+1} = \frac{1}{m} \begin{Bmatrix} b_0 + \left(\frac{1}{m}\right) b_1 + \left(\frac{1}{m}\right)^2 b_2 + \left(\frac{1}{m}\right)^3 b_3 \\ b_0 + \left(\frac{2}{m}\right) b_1 + \left(\frac{2}{m}\right)^2 b_2 + \left(\frac{2}{m}\right)^3 b_3 \\ \vdots \\ b_0 + \left(\frac{m}{m}\right) b_1 + \left(\frac{m}{m}\right)^2 b_2 + \left(\frac{m}{m}\right)^3 b_3 \end{Bmatrix} \tag{41}$$

Mit Verwendung der Summenformeln (30) und auf Grund der Gleichungen (40) und (41) ergibt sich für ${}^{(m)}D_{x+1}$ folgende Darstellung:

$$
{}^{(m)}D_{x+1} = \left\{ \begin{array}{ll}
(1) & \left[\quad \cdot \quad D_x \quad \cdot \quad \cdot \right] \\
\dfrac{m+1}{2m} & \left[-\dfrac{1}{3} D_{x-1} - \dfrac{1}{2} D_x + D_{x+1} - \dfrac{1}{6} D_{x+2} \right] \\
\dfrac{(2m+1)(m+1)}{6m^2} & \left[\dfrac{1}{2} D_{x-1} - D_x + \dfrac{1}{2} D_{x+1} \quad \cdot \right] \\
\dfrac{(m+1)^2}{4m^2} & \left[-\dfrac{1}{6} D_{x-1} + \dfrac{1}{2} D_x - \dfrac{1}{2} D_{x+1} + \dfrac{1}{6} D_{x+2} \right]
\end{array} \right\} \tag{42}
$$

Es folgen daraus die Formeln:

$$
D_{x+1} = -\frac{m^2-1}{24m^2} D_{x-1} + \frac{(m-1)(13m+1)}{24m^2} D_x + \frac{(m+1)(13m-1)}{24m^2} D_{x+1} - \frac{m^2-1}{24m^2} D_{x+2} \tag{43}
$$

$$
N_{x+1} = N_{x+1} + \frac{m-1}{2m} D_x - \frac{m^2-1}{12m^2} \varepsilon_x D_x \tag{44}
$$

$$
a_{x\overline{n}|} = a_{x\overline{n}} + \frac{m-1}{2m} (1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12m^2} \varepsilon_x \left(1 - {}_nE_x \frac{\varepsilon_{x+n}}{\varepsilon_x} \right) \tag{45}
$$

$$
\left. \begin{array}{l}
g = 1 \\
k = \dfrac{m-1}{2m} \\
{}_nK_x = -\dfrac{m^2-1}{12m^2} \varepsilon_x \left(1 - {}_nE_x \dfrac{\varepsilon_{x+n}}{\varepsilon_x} \right)
\end{array} \right\} \tag{46}
$$

Dabei ist:

$$
\varepsilon_x = \frac{D_{x-1} - D_{x+1}}{2 D_x} \tag{47}
$$

Fall VI.

Die Funktion $l_{x+\tau}$ wird im Intervall $(x-1)$ bis $(x+2)$ als eine Parabel dritten Grades aufgefaßt, die für $(x-1)$, (x), $(x+1)$ und $(x+2)$ gleiche Funktionswerte besitzt wie die durch die Sterbetafel gegebene Funktion. Zins und Diskont werden für den Bruchteil eines Jahres nach der Methode der einfachen Verzinsung berechnet.

Gemäß Annahme gelten:

a) die allgemeine Gleichung:

$$l_{x+\tau} = c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3 \qquad (48)$$

b) die besonderen Gleichungen:

$$\begin{aligned} l_x &= c_0 \\ l_{x-1} &= c_0 - c_1 + c_2 - c_3 \\ l_{x+1} &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3 \\ l_{x+2} &= c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 \end{aligned} \qquad (49)$$

Die Gleichungen (49) dienen zur Bestimmung der Koeffizienten c_0, c_1, c_2, c_3. Die Lösungen lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} c_0 &= l_x \\ c_1 &= -\frac{1}{3}l_{x-1} - \frac{1}{2}l_x + l_{x+1} - \frac{1}{6}l_{x+2} \\ c_2 &= \frac{1}{2}l_{x-1} - l_x + \frac{1}{2}l_{x+1} \\ c_3 &= -\frac{1}{6}l_{x-1} + \frac{1}{2}l_x - \frac{1}{2}l_{x+1} + \frac{1}{6}l_{x+2} \end{aligned} \qquad (50)$$

Bei der Berechnung von $D_{x+\frac{\lambda}{m}}$ wird die Zahl der Lebenden $l_{x+\frac{\lambda}{m}}$ zunächst nach der Methode der einfachen Zinsen bis zum Ende des Jahres aufgezinst und alsdann nach der Exponentialmethode bis zum Alter Null zurückdiskontiert.

Es gilt die Ausgangsgleichung:

$$D_{x+\frac{\lambda}{m}} = v^{x+1}\left(1+\frac{m-\lambda}{m}i\right)\left[c_0 + \frac{\lambda}{m}c_1 + \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{\lambda}{m}\right)^3 c_3 \right. \qquad (51)$$

Für ${}^{(m)}D_{x+1}$ ergibt sich die Darstellung:

$${}^{(m)}D_{x+1} = \frac{v^{x+1}}{m}\left\{\begin{array}{l} \left(1+\frac{m-1}{m}i\right)\left[c_0 + \frac{1}{m}c_1 + \left(\frac{1}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{1}{m}\right)^3 c_3\right] \\ \left(1+\frac{m-2}{m}i\right)\left[c_0 + \frac{2}{m}c_1 + \left(\frac{2}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{2}{m}\right)^3 c_3\right] \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \left(1+\frac{1}{m}i\right)\left[c_0 + \frac{m-1}{m}c_1 + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{m-1}{m}\right)^3 c_3\right] \\ (1) \qquad \left[c_0 + \frac{m}{m}c_1 + \left(\frac{m}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{m}{m}\right)^3 c_3\right] \end{array}\right\} \qquad (52)$$

Mit Verwendung der Summenformeln:

$$\frac{1}{m^2}(1+2+3+\cdots\cdots+m)=\frac{m+1}{2m}$$

$$\frac{1}{m^3}(1+2^2+3^2+\cdots\cdots+m^2)=\frac{(2m+1)(m+1)}{6m^2}$$

$$\frac{1}{m^4}(1+2^3+3^3+\cdots\cdots+m^3)=\frac{(m+1)^2}{4m^2} \tag{53}$$

$$\frac{1}{m^5}(1+2^4+3^4+\cdots\cdots+m^4)=\frac{(2m+1)(m+1)(3m^2+3m-1)}{30m^4}$$

ergibt sich für ${}^{(m)}D_{x+1}$ die folgende Darstellung:

$${}^{(m)}D_{x+1}=v^{x+1}(\gamma_0 c_0+\gamma_1 c_1+\gamma_2 c_2+\gamma_3 c_3) \tag{54}$$

Dabei bedeuten:

$$\begin{aligned}
\gamma_0&=1+\frac{m-1}{2m}i\\
\gamma_1&=\frac{m+1}{2m}+\frac{m^2-1}{6m^2}i\\
\gamma_2&=\frac{(2m+1)(m+1)}{6m^2}+\frac{m^2-1}{12m^2}i\\
\gamma_3&=\frac{(m+1)^2}{4m^2}+\frac{(m+1)[3m^3-3m^2-2m+2]}{60m^4}i
\end{aligned} \tag{55}$$

Mit Verwendung der Gleichungen (50) ergeben sich für ${}^{(m)}D_{x+1}$ folgende Darstellungen:

$${}^{(m)}D_{x+1}=v^{x+1}\left\{\begin{aligned}
&\left(\cdot-\frac{1}{3}\gamma_1+\frac{1}{2}\gamma_2-\frac{1}{6}\gamma_3\right)l_{x-1}\\
&\left(\gamma_0-\frac{1}{2}\gamma_1-\gamma_2+\frac{1}{2}\gamma_3\right)l_x\\
&\left(\cdot\quad\gamma_1+\frac{1}{2}\gamma_2-\frac{1}{2}\gamma_3\right)l_{x+1}\\
&\left(\cdot-\frac{1}{6}\gamma_1\quad\cdot+\frac{1}{6}\gamma_3\right)l_{x+2}
\end{aligned}\right. \tag{56}$$

und:

$$ {}^{(m)}D_{x+1} = \left\{ \begin{array}{l} v^2\left(\cdot - \frac{1}{3}\gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_2 - \frac{1}{6}\gamma_3\right) D_{x-1} \\ v\left(\gamma_0 - \frac{1}{2}\gamma_1 - \gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_3\right) D_x \\ (1)\left(\cdot \quad \gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_3\right) D_{x+1} \\ \frac{1}{v}\left(\cdot - \frac{1}{6}\gamma_1 \quad \cdot \quad + \frac{1}{6}\gamma_3\right) D_{x+2} \end{array} \right\} \qquad (57) $$

Es ergeben sich so die Formeln:

$$ {}^{(m)}N_{x+1} = g \cdot N_{x+1} + k\, D_x + K_x\, D_x \qquad (58) $$

$$ {}^{(m)}a_{x\overline{n}|} = g \cdot a_{x\overline{n}|} + k\,(1 - {}_nE_x) + {}_nK_x \qquad (59) $$

$$ g = 1 + \frac{(m^2-1)(11\,m^2+1)}{90\,m^4}\, i\, d - \frac{(m^2-1)(7\,m^2+2)}{360\,m^4}(i^2+d^2) \qquad (60) $$

$$ k = \frac{m-1}{2\,m} - \frac{(m^2-1)(11\,m^2+1)}{90\,m^4}\, d - \frac{(m^2-1)(7\,m^2+2)}{360\,m^4}\, d^2 \qquad (61) $$

$$ K_x = -\frac{m^2-1}{12\,m^2}\,\varepsilon_x \qquad (62) $$

$${}_nK_x = -\frac{m^2-1}{12\,m^2}\,\varepsilon_x\left(1 - {}_nE_x\frac{\varepsilon_{x+n}}{\varepsilon_x}\right) \qquad (63)$$

$$ \varepsilon_x = \frac{1}{2\,D_x}\left\{ \begin{array}{l} \left[(1-d) - \frac{7\,m^2+2}{15\,m^2}(d-d^2)\right] D_{x-1} \\ -\left[(1+i) + \frac{7\,m^2+2}{15\,m^2}(i+i^2)\right] D_{x+1} \end{array} \right\} \qquad (64) $$

Fall VII.[1])

Die Funktion $l_{x+\tau}$ wird im Intervall $(x-1)$ bis $(x+2)$ als eine Parabel dritten Grades aufgefaßt, die für $(x-1)$, (x), $(x+1)$ und $(x+2)$ gleiche Funktionswerte besitzt wie die durch die Sterbetafel gegebene Funktion. Zins und Diskont werden für den Bruchteil eines Jahres nach der Exponentialmethode berechnet.

[1]) Die hier abgeleiteten Formeln wurden im Jahre 1867 erstmals von Th. B. Sprague im Journal inst. act., Band XIII veröffentlicht.

Bei der Berechnung von $D_{x+\frac{\lambda}{m}}$ wird die Zahl der Lebenden $l_{x+\frac{\lambda}{m}}$ zunächst nach der Exponentialmethode bis zum Ende des Jahres aufgezinst und alsdann bis zum Alter Null zurückdiskontiert.

Es gilt die Ausgangsgleichung:

$$D_{x+\frac{\lambda}{m}} = v^{x+1}(1+i)^{\frac{m-\lambda}{m}}\left[c_0 + \frac{\lambda}{m}c_1 + \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{\lambda}{m}\right)^3 c_3\right] \qquad (65)$$

Für die Koeffizienten c_0, c_1, c_2 und c_3 gelten die Gleichungen (50).

Für ${}^{(m)}D_{x+1}$ ergibt sich die Darstellung:

$${}^{(m)}D_{x+1} = \frac{v^{x+1}}{m}\left\{\begin{array}{l}(1+i)^{\frac{m-1}{m}}\left[c_0 + \frac{1}{m}c_1 + \left(\frac{1}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{1}{m}\right)^3 c_3\right] \\ (1+i)^{\frac{m-2}{m}}\left[c_0 + \frac{2}{m}c_1 + \left(\frac{2}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{2}{m}\right)^3 c_3\right] \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (1+i)^{\frac{1}{m}}\left[c_0 + \frac{m-1}{m}c_1 + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{m-1}{m}\right)^3 c_3\right] \\ (1)\qquad\left[c_0 + \frac{m}{m}c_1 + \left(\frac{m}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{m}{m}\right)^3 c_3\right]\end{array}\right\} \qquad (66)$$

Mit Verwendung der Summenformeln:

$$\begin{array}{l}\frac{1}{m}\left[(1+i)^{\frac{m-1}{m}} + (1+i)^{\frac{m-2}{m}} + \cdots\cdots\cdots + (1+i)^{\frac{1}{m}} + 1\right] = \delta_0 \\ \frac{1}{m^2}\left[(1+i)^{\frac{m-1}{m}} + 2(1+i)^{\frac{m-2}{m}} + \cdots\cdots + (m-1)(1+i)^{\frac{1}{m}} + m\right] = \delta_1 \\ \frac{1}{m^3}\left[(1+i)^{\frac{m-1}{m}} + 2^2(1+i)^{\frac{m-2}{m}} + \cdots\cdots + (m-1)^2(1+i)^{\frac{1}{m}} + m^2\right] = \delta_2 \\ \frac{1}{m^4}\left[(1+i)^{\frac{m-1}{m}} + 2^3(1+i)^{\frac{m-2}{m}} + \cdots\cdots + (m-1)^3(1+i)^{\frac{1}{m}} + m^3\right] = \delta_3\end{array} \qquad (67)$$

wobei:

$$\delta_0 = \frac{i}{j_{(m)}}$$

$$\delta_1 = \frac{i}{j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{j_{(m)}}$$

$$\delta_2 = \frac{i}{j^3_{(m)}}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + (1+i)^{\frac{2}{m}}\right] - 2\,\frac{1}{j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{j_{(m)}}$$

$$\delta_3 = \frac{i}{j^4_{(m)}}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + 4(1+i)^{\frac{2}{m}} + (1+i)^{\frac{3}{m}}\right] \qquad (68)$$
$$- 3\,\frac{1}{j^3_{(m)}}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + (1+i)^{\frac{2}{m}}\right]$$
$$- 3\,\frac{1}{j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}}$$
$$- \frac{1}{j_{(m)}}$$

ergibt sich für ${}^{(m)}D_{x+1}$ folgende Darstellung:

$${}^{(m)}D_{x+1} = v^{x+1}(\delta_0 c_0 + \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2 + \delta_3 c_3) \qquad (69)$$

Mit Verwendung der Gleichungen (50) ergeben sich für ${}^{(m)}D_{x+1}$ weiter folgende Darstellungen:

$${}^{(m)}D_{x+1} = v^{x+1}\left\{\begin{array}{l}\left(\cdot - \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2 - \frac{1}{6}\delta_3\right) l_{x-1} \\ \left(\delta_0 - \frac{1}{2}\delta_1 - \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3\right) l_x \\ \left(\cdot + \delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_3\right) l_{x+1} \\ \left(\cdot - \frac{1}{6}\delta_1 \cdot + \frac{1}{6}\delta_3\right) l_{x+2}\end{array}\right\} \qquad (70)$$

und:

$${}^{(m)}D_{x+1} = \left\{\begin{array}{l} v^2\left(\cdot - \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2 - \frac{1}{6}\delta_3\right) D_{x-1} \\ v\left(\delta_0 - \frac{1}{2}\delta_1 - \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3\right) D_x \\ (1)\left(\cdot + \delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_3\right) D_{x+1} \\ \frac{1}{v}\left(\cdot - \frac{1}{6}\delta_1 \cdot + \frac{1}{6}\delta_3\right) D_{x+2}\end{array}\right\} \qquad (71)$$

Es ergeben sich so die Formeln:

$$ {}^{(m)}N_{x+1} = g\,N_{x+1} + k\,D_x + K_x\,D_x \tag{72} $$

$$ {}^{(m)}a_{x\overline{n}|} = g\,a_{x\overline{n}|} + k\,(1 - {}_nE_x) + {}_nK_x \tag{73} $$

$$ g = \frac{i^2\,d^2}{6\,j^4_{(m)}}\left[\left\{(1+i)^{\frac{1}{m}} + 4\,(1+i)^{\frac{2}{m}} + (1+i)^{\frac{3}{m}}\right\} - j^2_{(m)}\,(1+i)^{\frac{1}{m}}\right] \tag{74} $$

$$ k = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(2+d)\,d}{6\,j^4_{(m)}}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + 4\,(1+i)^{\frac{2}{m}} + (1+i)^{\frac{3}{m}}\right] \\ -\dfrac{1}{j^3_{(m)}}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + (1+i)^{\frac{2}{m}}\right] \\ -\dfrac{(2+d)\,d}{6\,j^2_{(m)}}\,(1+i)^{\frac{1}{m}} + \dfrac{1}{j_{(m)}} \end{array}\right\} \tag{75} $$

$$ K_x = -\frac{u_{(-1)}\,D_{x-1} - u_{(+1)}\,D_{x+1}}{2\,D_x} \tag{76} $$

$$ {}_nK_x = K_x\left(1 - {}_nE_x\,\frac{K_{x+n}}{K_x}\right) \tag{77} $$

$$ u_{(-1)} = \left\{\begin{array}{l} +\dfrac{d\,(1-d)}{3\,j^4_{(m)}}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + 4\,(1+i)^{\frac{2}{m}} + (1+i)^{\frac{3}{m}}\right] \\ -\dfrac{(1-d)}{j^3_{(m)}}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + (1+i)^{\frac{2}{m}}\right] \\ +\dfrac{(1-d)\,(3-d)}{3\,j^2_{(m)}}\,(1+i)^{\frac{1}{m}} \end{array}\right\} \tag{78} $$

$$ u_{(+1)} = \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{i\,(1+i)}{3\,j^4_{(m)}}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + 4\,(1+i)^{\frac{2}{m}} + (1+i)^{\frac{3}{m}}\right] \\ +\dfrac{(1+i)}{j^3_{(m)}}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + (1+i)^{\frac{2}{m}}\right] \\ +\dfrac{(1+i)\,(3+i)}{3\,j^2_{(m)}}\,(1+i)^{\frac{1}{m}} \end{array}\right\} \tag{79} $$

Im Abschnitt E (Reihenentwicklungen) werden für g, k, $u_{(-1)}$ und $u_{(+1)}$ Reihen abgeleitet, deren Glieder nach Potenzen von i steigen.

Die Reihendarstellungen lauten wie folgt:

$$g = 1 - \frac{(m^2-1)(11m^2+1)}{720\,m^4} i^4 + \frac{(m^2-1)(11m^2+1)}{360\,m^4} i^5 - + \cdots$$

$$k = \frac{m-1}{2m} - \frac{(m^2-1)(11m^2+1)}{90\,m^4} i + \frac{(m^2-1)(11m^2+1)}{180\,m^4} i^2$$
$$- \frac{(m^2-1)(20m^4-m^2-1)}{756\,m^6} i^3 + \frac{(m^2-1)(3m^4-11m^2-4)}{2016\,m^6} i^4$$
$$+ \frac{(m^2-1)(1201m^6+481m^4+124m^2-6)}{64\,800\,m^8} i^5 \cdots$$

$$u_{(-1)} = \frac{m^2-1}{12m^2} - \frac{(m^2-1)(11m^2+1)}{90\,m^4} i + \frac{(m^2-1)(11m^2+1)}{72\,m^4} i^2$$
$$- \frac{(m^2-1)(271m^4+19m^2-2)}{1\,512\,m^6} i^3 + \frac{(m^2-1)(117m^4+5m^2-2)}{576\,m^6} i^4$$
$$- \frac{(m^2-1)(7297m^6+97m^4-197m^2+3)}{32\,400\,m^8} i^5 + - \cdots$$

$$u_{(+1)} = (1+i)^4 \left[\frac{m^2-1}{12m^2} - \frac{(m^2-1)(19m^2-1)}{90\,m^4} i + \frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{24\,m^4} i^2 \right.$$
$$- \frac{(m^2-1)(863m^4-145m^2+2)}{1512\,m^6} i^3 + \frac{(m^2-1)(2750m^4-610m^2+20)}{3456\,m^6} i^4$$
$$\left. - \frac{(m^2-1)(33\,953m^6-9\,247m^4+497m^2-3)}{32\,400\,m^8} i^5 + - \cdots \right]$$

Abschnitt B.

Vorschußweise zahlbare Leibrenten.

Bei einer vorschußweise während n Jahren, jedes $\frac{1}{m}$ Jahr mit dem Betrage $\frac{1}{m}$ zahlbaren Leibrente wird spätestens nach $\left(n - \frac{1}{m}\right)$ Jahren die letzte $\frac{1}{m}$ Rente fällig.

Es mögen folgende Abkürzungen gelten:

$$^{(m)}\mathfrak{D}_x = \frac{1}{m}\left[D_x + D_{x+\frac{1}{m}} + D_{x+\frac{2}{m}} + \cdots\cdots + D_{x+\frac{m-1}{m}}\right]$$

$$^{(m)}\mathfrak{N}_x = {}^{(m)}\mathfrak{D}_x + {}^{(m)}\mathfrak{D}_{x+1} + {}^{(m)}\mathfrak{D}_{x+2} + \cdots\cdots \text{ (bis zum Schluß der Tafel)}$$

Alsdann gilt für den Barwert der vorschußweise während n Jahren, jedes $\frac{1}{m}$ Jahr mit dem Betrage $\frac{1}{m}$ zahlbaren Leibrente die Formel:

$$^{(m)}a_{x\,\overline{n}|} = \frac{{}^{(m)}\mathfrak{N}_x - {}^{(m)}\mathfrak{N}_{x+n}}{D_x} \qquad (1)$$

Im Falle von jährlicher Rentenzahlung ($m = 1$) lautet die Formel für den Barwert der während n Jahren vorschußweise zahlbaren Leibrente wie folgt:

$$a_{x\,\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad (2)$$

Formel (1) kann in dieser Form im allgemeinen nicht zur Berechnung des Barwertes der unterjährigen Renten verwendet werden. Die Unterscheidung der eingangs erläuterten Fälle I bis VII, gestattet die Ableitung verschiedener brauchbarer Formeln, die alle auf folgende allgemeine Form gebracht werden können:

$$^{(m)}a_{x\,\overline{n}|} = \mathfrak{g}\,a_{x\,\overline{n}|} + \mathfrak{k}(1 - {}_nE_x) + {}_n\mathfrak{K}_x \qquad (3)$$

Fall I.

Die Funktion $D_{x+\tau}$ verläuft innerhalb eines Jahres linear. Es gilt die Ausgangsgleichung:

$$D_{x+\frac{\lambda}{m}} = \frac{m-\lambda}{m} D_x + \frac{\lambda}{m} D_{x+1} \tag{4}$$

Für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ folgt daraus die Darstellung:

$${}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \frac{1}{m} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{m}{m} D_x & \\ \frac{m-1}{m} D_x & + \frac{1}{m} D_{x+1} \\ \frac{m-2}{m} D_x & + \frac{2}{m} D_{x+1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{m} D_x & + \frac{m-1}{m} D_{x+1} \end{array} \right\} \tag{5}$$

Es ergeben sich auf Grund dieser Darstellung die nachfolgenden Formeln:

$${}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \frac{m+1}{2m} D_x + \frac{m-1}{2m} D_{x+1} \tag{6}$$

$${}^{(m)}\mathfrak{N}_x = N_x - \frac{m-1}{2m} D_x \tag{7}$$

$${}^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|} = \mathfrak{a}_{x\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m} (1 - {}_nE_x) \tag{8}$$

$$\left. \begin{array}{rl} \mathfrak{g} &= 1 \\ \mathfrak{f} &= -\frac{m-1}{2m} \\ {}_n\mathfrak{K}_x &= 0 \end{array} \right\} \tag{9}$$

Fall II.

Die Funktion $l_{x+\tau}$ verläuft innerhalb eines Jahres linear. Zins und Diskont werden für den Bruchteil eines Jahres nach der Methode der einfachen Verzinsung berechnet.

Bei der Berechnung von $D_{x+\frac{\lambda}{m}}$ wird die Zahl der Lebenden $l_{x+\frac{\lambda}{m}}$ zunächst nach der Methode der einfachen Diskontierung bis zum Anfang des Jahres und alsdann nach der Exponentialmethode bis zum Alter Null zurückdiskontiert.

Es gilt die Ausgangsgleichung:

$$D_{x+\frac{\lambda}{m}} = v^x \left(1 - \frac{\lambda}{m} d\right) \left(\frac{m-\lambda}{m} l_x + \frac{\lambda}{m} l_{x+1}\right) \qquad (10)$$

Für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ folgt daraus die Darstellung:

$${}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \frac{v^x}{m} \left\{ \begin{array}{ll} (1) & \left(\frac{m}{m} l_x \quad \cdot\right) \\ \left(1 - \frac{1}{m} d\right) & \left(\frac{m-1}{m} l_x + \frac{1}{m} l_{x+1}\right) \\ \left(1 - \frac{2}{m} d\right) & \left(\frac{m-2}{m} l_x + \frac{2}{m} l_{x+1}\right) \\ \vdots & \vdots \\ \left(1 - \frac{m-1}{m} d\right) & \left(\frac{1}{m} l_x + \frac{m-1}{m} l_{x+1}\right) \end{array} \right\} \qquad (11)$$

Mit Verwendung der Summenformeln:

$$\frac{1}{m^2}[1 + 2 + \cdots\cdots + (m-1)] = \frac{m-1}{2m} \qquad (12)$$

$$\frac{1}{m^3}[1 + 2^2 + \cdots\cdots + (m-1)^2 = \frac{(m-1)(2m-1)}{6m^2} \qquad (13)$$

ergeben sich auf Grund der Darstellung (11) folgende Formeln:

$${}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \left(\frac{m+1}{2m} - \frac{m^2-1}{6m^2} d\right) D_x + \left(\frac{m-1}{2m} + \frac{m^2-1}{6m^2} i\right) D_{x+1} \qquad (14)$$

$${}^{(m)}\mathfrak{N}_x = \left(1 + \frac{m^2-1}{6m^2} i\, d\right) N_x - \left(\frac{m-1}{2m} + \frac{m^2-1}{6m^2} i\right) D_x \qquad (15)$$

$${}^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|} = 1 + \frac{m^2-1}{6m^2} i\, d\Big) \mathfrak{a}_{x\overline{n}|} - \left(\frac{m-1}{2m} + \frac{m^2-1}{6m^2} i\right)(1 - {}_nE_x) \qquad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g} &= 1 + \frac{m^2-1}{6\,m^2}\,i\,d \\ \mathfrak{f} &= -\left(\frac{m-1}{2\,m} + \frac{m^2-1}{6\,m^2}\,i\right) \\ {}_n\mathfrak{K}_x &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Fall III.[1])

Die Funktion $l_{x+\tau}$ verläuft innerhalb eines Jahres linear. Zins und Diskont werden für den Bruchteil eines Jahres nach der Exponentialmethode berechnet.

Bei der Berechnung von $D_{x+\frac{\lambda}{m}}$ wird die Zahl der Lebenden $l_{x+\frac{\lambda}{m}}$ nach der Exponentialmethode zunächst bis zum Anfang des Jahres und dann bis zum Alter Null zurückdiskontiert.

Es gilt die Ausgangsgleichung:

$$D_{x+\frac{\lambda}{m}} = v^x\, v^{\frac{\lambda}{m}} \left(\frac{m-\lambda}{m}\, l_x + \frac{\lambda}{m}\, l_{x+1}\right) \tag{18}$$

Für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ folgt daraus die Darstellung:

$${}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \frac{v^x}{m} \left\{ \begin{array}{l} (1)\ \left(\frac{m}{m}\, l_x \qquad \cdot \right) \\ v^{\frac{1}{m}} \left(\frac{m-1}{m}\, l_x + \frac{1}{m}\, l_{x+1}\right) \\ v^{\frac{2}{m}} \left(\frac{m-2}{m}\, l_x + \frac{2}{m}\, l_{x+1}\right) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ v^{\frac{m-1}{m}} \left(\frac{1}{m}\, l_x + \frac{m-1}{m}\, l_{x+1}\right) \end{array} \right\} \tag{19}$$

Mit Verwendung der Summenformeln:

$$\frac{1}{m}\left[v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots\cdots\cdots + v^{\frac{m-1}{m}}\right] = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{f_{(m)}} - \frac{v}{f_{(m)}} \tag{20}$$

$$\frac{1}{m^2}\left[v^{\frac{1}{m}} + 2\,v^{\frac{2}{m}} + \cdots + (m-1)\,v^{\frac{m-1}{m}}\right] = \frac{d}{f^2_{(m)}}\, v^{\frac{1}{m}} - \frac{v}{f_{(m)}} \tag{21}$$

[1]) Vergleiche den Literaturnachweis zu Fall III, Abschnitt A.

wo $f_{(m)}$ den nominellen Diskontsatz bedeutet, nämlich $f_{(m)} = m\left[1 - v^{\frac{1}{m}}\right]$ ergeben sich auf Grund der Darstellung (19) folgende Formeln:

$$^{(m)}\mathfrak{D}_x = \left(\frac{1}{f_{(m)}} - \frac{d}{f^2_{(m)}} v^{\frac{1}{m}}\right) D_x + \left(\frac{i}{f^2_{(m)}} v^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{f_{(m)}}\right) D_{x+1} \tag{22}$$

$$^{(m)}\mathfrak{N}_x = \frac{i\,d}{f^2_{(m)}} v^{\frac{1}{m}}\, N_x - \left(\frac{i}{f^2_{(m)}} v^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{f_{(m)}}\right) D_x \tag{23}$$

$$^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|} = \frac{i\,d}{f^2_{(m)}} v^{\frac{1}{m}}\, \mathfrak{a}_{x\overline{n}|} - \left(\frac{i}{f^2_{(m)}} v^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{f_{(m)}}\right)(1 - {}_nE_x) \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \frac{i\,d}{f^2_{(m)}} v^{\frac{1}{m}} \\ \mathfrak{f} &= -\left(\frac{i}{f^2_{(m)}} v^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{f_{(m)}}\right) \\ {}_n\mathfrak{K}_x &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Im Abschnitt E (Reihenentwicklungen) werden für $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{f}$ Reihen abgeleitet, deren Glieder nach Potenzen von i steigen.

Die Reihendarstellungen lauten wie folgt:

$$\mathfrak{g} = 1 + \frac{m^2-1}{12\,m^2} i^2 - \frac{m^2-1}{12\,m^2} i^3 + \frac{(m^2-1)(19\,m^2-1)}{240\,m^4} i^4 - \frac{(m^2-1)(9\,m^2-1)}{120\,m^4} i^5 + - \cdots\cdots$$

$$\mathfrak{f} = -\frac{m-1}{2\,m} - \frac{m^2-1}{6\,m^2} i + \frac{m^2-1}{24\,m^2} i^2 - \frac{(m^2-1)(4\,m^2-1)}{180\,m^4} i^3 + \frac{(m^2-1)(7\,m^2-3)}{480\,m^4} i^4 - \frac{(m^2-1)(107\,m^4-61\,m^2+2)}{10\,080\,m^6} i^5 + - \cdots\cdots$$

Fall IV.

Die Sterbetafel ist nach einem analytischen Gesetz ausgeglichen. Die Funktion $D_{x+\tau}$ wird im Intervall (x) bis $(x+1)$ als eine Parabel dritten Grades aufgefaßt, die für (x) und $(x+1)$ gleiche Funktionswerte und gleiche erste Ableitungen (gleiche Tangenten) besitzt wie die durch die Sterbetafel gegebene Funktion.

Es gilt die Ausgangsgleichung:

$$D_{x+\tau} = a_0 + a_1\,\tau + a_2\,\tau^2 + a_3\,\tau^3 \tag{26}$$

Die erste Ableitung nach τ lautet wie folgt:

$$D'_{x+\tau} = a_1 + 2\,a_2\,\tau + 3\,a_3\,\tau^2 \qquad (27)$$

Wird in den Gleichungen (26) und (27) für τ das eine Mal der Wert 0 und das andere Mal der Wert 1 eingesetzt, so ergeben sich 4 Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3. Die Lösungen lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} a_0 &= D_x \\ a_1 &= \quad\quad D'_x \\ a_2 &= -3\,D_x - 2\,D'_x + 3\,D_{x+1} - D'_{x+1} \\ a_3 &= \quad 2\,D_x + \quad D'_x - 2\,D_{x+1} + D'_{x+1} \end{aligned} \qquad (28)$$

Für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ ergibt sich die Darstellung:

$${}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \frac{1}{m}\left\{\begin{array}{l} a_0 \\ a_0 + \frac{1}{m}\,a_1 + \left(\frac{1}{m}\right)^2 a_2 + \left(\frac{1}{m}\right)^3 a_3 \\ a_0 + \frac{2}{m}\,a_1 + \left(\frac{2}{m}\right)^2 a_2 + \left(\frac{2}{m}\right)^3 a_3 \\ \vdots \\ a_0 + \frac{m-1}{m}\,a_1 + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 a_2 + \left(\frac{m-1}{m}\right)^3 a_3 \end{array}\right\} \qquad (29)$$

Mit Verwendung der Summenformeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2}[1 + 2 \;+ 3 \;+ \cdots\cdots + (m-1)] &= \frac{m-1}{2\,m} \\ \frac{1}{m^3}[1 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + (m-1)^2] &= \frac{(2\,m-1)(m-1)}{6\,m^2} \\ \frac{1}{m^4}[1 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + (m-1)^3] &= \frac{(m-1)^2}{4\,m^2} \end{aligned} \qquad (30)$$

und unter Berücksichtigung der Gleichungen (28) und (29) ergibt sich für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ folgende Darstellung:

$${}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \left\{\begin{array}{ll} (1) & (\quad D_x \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad) \\ \frac{m-1}{2\,m} & (\quad\cdot\quad D'_x \quad\cdot\quad\cdot\quad) \\ \frac{(2\,m-1)(m-1)}{6\,m^2} & (-3\,D_x - 2\,D'_x + 3\,D_{x+1} - D'_{x+1}) \\ \frac{(m-1)^2}{4\,m^2} & (\quad 2\,D_x + \quad D'_x - 2\,D_{x+1} + D'_{x+1}) \end{array}\right\} \qquad (31)$$

Es folgen daraus die Formeln:

$$^{(m)}\mathfrak{D}_x = \frac{m+1}{2m} D_x + \frac{m^2-1}{12m^2} D'_x + \frac{m-1}{2m} D_{x+1} - \frac{m^2-1}{12m^2} D'_{x+1} \tag{32}$$

$$^{(m)}\mathfrak{N}_x = N_x - \frac{m-1}{2m} D_x + \frac{m^2-1}{12m^2} D'_x \tag{33}$$

$$^{(m)}\mathfrak{a}_{x\,n} = \mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) + \frac{m^2-1}{12m^2}\varepsilon_x\left[1 - {}_nE_x \frac{\varepsilon_{x+n}}{\varepsilon_x}\right] \tag{34}$$

Mit Verwendung der im Abschnitt A (nachschußweise zahlbare Leibrenten) hergeleiteten Beziehungen:

$$\begin{aligned} D'_x &= -D_x(\mu_x + \delta) \\ \varepsilon_x &= -(\mu_x + \delta) \end{aligned} \tag{35}$$

läßt sich die Formel (34) wie folgt schreiben:

$$^{(m)}\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|} = \mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x+\delta)\left[1 - {}_nE_x \frac{\mu_{x+n}+\delta}{\mu_x+\delta}\right] \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g} &= 1 \\ \mathfrak{f} &= -\frac{m-1}{2m} \\ {}_n\mathfrak{K}_x &= -\frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x+\delta)\left[1 - {}_nE_x \frac{\mu_{x+n}+\delta}{\mu_x+\delta}\right] \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Vergleiche den Literaturnachweis am Schlusse von Fall IV, Abschnitt A, sowie die Ausführungen in Abschnitt D.

Fall V.

Die Funktion $D_{x+\tau}$ wird im Intervall $(x-1)$ bis $(x+2)$ als eine Parabel dritten Grades aufgefaßt, die für $(x-1)$, (x), $(x+1)$ und $(x+2)$ gleiche Funktionswerte besitzt wie die durch die Sterbetafel gegebene Funktion.

Gemäß Annahme gelten:

a) die allgemeine Gleichung:

$$D_{x+\tau} = b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + b_3\tau^3 \tag{38}$$

b) die besonderen Gleichungen:

$$\begin{aligned} D_x &= b_0 \\ D_{x-1} &= b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \\ D_{x+1} &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \\ D_{x+2} &= b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 \end{aligned} \tag{39}$$

Die Gleichungen (39) dienen zur Bestimmung der Koeffizienten b_0, b_1, b_2, b_3. Die Lösungen lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} b_0 &= \quad\quad\quad D_x \\ b_1 &= -\frac{1}{3} D_{x-1} - \frac{1}{2} D_x + D_{x+1} - \frac{1}{6} D_{x+2} \\ b_2 &= \frac{1}{2} D_{x-1} - D_x + \frac{1}{2} D_{x+1} \\ b_3 &= -\frac{1}{6} D_{x-1} + \frac{1}{2} D_x - \frac{1}{2} D_{x+1} + \frac{1}{6} D_{x+2} \end{aligned} \tag{40}$$

Für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ ergibt sich die Darstellung:

$${}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \frac{1}{m} \begin{Bmatrix} bo & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 + \frac{1}{m} b_1 + \left(\frac{1}{m}\right)^2 b_2 + \left(\frac{1}{m}\right)^3 b_3 \\ b_0 + \frac{2}{m} b_1 + \left(\frac{2}{m}\right)^2 b_2 + \left(\frac{2}{m}\right)^3 b_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ b_0 + \frac{m-1}{m} b_1 + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 b_2 + \left(\frac{m-1}{m}\right)^3 b_3 \end{Bmatrix} \tag{41}$$

Mit Verwendung der Summenformeln (30) und auf Grund der Gleichungen (40) und (41) ergibt sich für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ folgende Darstellung:

$${}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \begin{Bmatrix} (1) & (\cdot & D_x & \cdot & \cdot) \\ \frac{m-1}{2m} & \left(-\frac{1}{3} D_{x-1} - \frac{1}{2} D_x + D_{x+1} - \frac{1}{6} D_{x+2}\right) \\ \frac{(2m-1)(m-1)}{6m^2} & \left(\frac{1}{2} D_{x-1} - D_x + \frac{1}{2} D_{x+1} \quad \cdot\right) \\ \frac{(m-1)^2}{4m^2} & \left(-\frac{1}{6} D_{x-1} + \frac{1}{2} D_x - \frac{1}{2} D_{x+1} + \frac{1}{6} D_{x+2}\right) \end{Bmatrix} \tag{42}$$

Es folgen daraus die Formeln:

$$\mathfrak{D}_x = -\frac{m^2-1}{24\,m^2} D_{x-1} + \frac{(m+1)(13m-1)}{24\,m^2} D_x + \frac{(m-1)(13m+1)}{24\,m^2} D_{x+1} - \frac{m^2-1}{24\,m^2} D_{x+2} \quad (43)$$

$$\mathfrak{N}_x = N_x - \frac{m-1}{2\,m} D_x - \frac{m^2-1}{12\,m^2} \varepsilon_x D_x \quad (44)$$

$$a_{x\overline{n}|} = a_{x\overline{n}|} - \frac{m-1}{2\,m}(1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12\,m^2} \varepsilon_x \left[1 - {}_nE_x \frac{\varepsilon_{x+n}}{\varepsilon_x}\right] \quad (45)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g} &= 1 \\ \mathfrak{f} &= -\frac{m-1}{2\,m} \\ {}_n\mathfrak{K}_x &= -\frac{m^2-1}{12\,m^2} \varepsilon_x \left[1 - {}_nE_x \frac{\varepsilon_{x+n}}{\varepsilon_x}\right] \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Dabei ist:

$$\varepsilon_x = \frac{D_{x-1} - D_{x+1}}{2\,D_x} \quad (47)$$

Fall VI.

Die Funktion $l_{x+\tau}$ wird im Intervall $(x-1)$ bis $(x+2)$ als eine Parabel dritten Grades aufgefaßt, die für $(x-1)$, (x), $(x+1)$ und $(x+2)$ gleiche Funktionswerte besitzt wie die durch die Sterbetafel gegebene Funktion. Zins und Diskont werden für den Bruchteil eines Jahres nach der Methode der einfachen Verzinsung berechnet.

Gemäß Annahme gelten:

a) die allgemeine Gleichung:

$$l_{x+\tau} = c_0 + c_1 \tau + c_2 \tau^2 + c_3 \tau^3 \quad (48)$$

b) die besonderen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} l_x &= c_0 \\ l_{x-1} &= c_0 - c_1 + c_2 - c_3 \\ l_{x+1} &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3 \\ l_{x+2} &= c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Die Gleichungen (49) dienen zur Bestimmung der Koeffizienten c_0, c_1, c_2, c_3. Die Lösungen lauten wie folgt:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \qquad\qquad\quad l_x \\
c_1 &= -\frac{1}{3}l_{x-1} - \frac{1}{2}l_x + \quad l_{x+1} - \frac{1}{6}l_{x+2} \\
c_2 &= \quad \frac{1}{2}l_{x-1} - \quad l_x + \frac{1}{2}l_{x+1} \\
c_3 &= -\frac{1}{6}l_{x-1} + \frac{1}{2}l_x - \frac{1}{2}l_{x+1} + \frac{1}{6}l_{x+2}
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Bei der Berechnung von $D_{x+\frac{\lambda}{m}}$ wird die Zahl der Lebenden $l_{x+\frac{\lambda}{m}}$ zunächst nach der Methode der einfachen Diskontierung bis zum Anfang des Jahres und alsdann nach der Exponentialmethode bis zum Alter Null zurückdiskontiert.

Es gilt die Ausgangsgleichung:

$$
D_{x+\frac{\lambda}{m}} = v^x \left(1 - \frac{\lambda}{m} d\right)\left[c_0 + \frac{\lambda}{m} c_1 + \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{\lambda}{m}\right)^3 c_3\right] \tag{51}
$$

Für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ ergibt sich die Darstellung:

$$
{}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \frac{v^x}{m}\left\{
\begin{array}{l}
(1) \qquad\qquad [c_0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad] \\
\left(1 - \frac{1}{m} d\right)\left[c_0 + \frac{1}{m} c_1 + \left(\frac{1}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{1}{m}\right)^3 c_3\right] \\
\left(1 - \frac{2}{m} d\right)\left[c_0 + \frac{2}{m} c_1 + \left(\frac{2}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{2}{m}\right)^3 c_3\right] \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\left(1 - \frac{m-1}{m} d\right)\left[c_0 + \frac{m-1}{m} c_1 + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{m-1}{m}\right)^3 c_3\right]
\end{array}
\right\} \tag{52}
$$

Mit Verwendung der Summenformeln:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m^2}[1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + (m-1)] &= \frac{m-1}{2m} \\
\frac{1}{m^3}[1 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + (m-1)^2] &= \frac{(m-1)(2m-1)}{6m^2} \\
\frac{1}{m^4}[1 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + (m-1)^3] &= \frac{(m-1)^2}{4m^2} \\
\frac{1}{m^5}[1 + 2^4 + 3^4 + \cdots\cdots + (m-1)^4] &= \frac{(m-1)(2m-1)(3m^2-3m-1)}{30m^4}
\end{aligned}
\tag{53}
$$

ergibt sich für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ die folgende Darstellung:

$$ {}^{(m)}\mathfrak{D}_x = v^x(\gamma_0 c_0 + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \gamma_3 c_3) \tag{54} $$

Dabei bedeuten:

$$ \begin{aligned} \gamma_0 &= 1 - \frac{m-1}{2m} d \\ \gamma_1 &= \frac{m-1}{2m} - \frac{(m-1)(2m-1)}{6m^2} d \\ \gamma_2 &= \frac{(m-1)(2m-1)}{6m^2} - \frac{(m-1)^2}{4m^2} d \\ \gamma_3 &= \frac{(m-1)^2}{4m^2} - \frac{(m-1)(2m-1)(3m^2-3m-1)}{30m^4} d \end{aligned} \tag{55} $$

Mit Verwendung der Gleichungen (50) ergeben sich für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ folgende Darstellungen:

$$ {}^{(m)}\mathfrak{D}_x = v^x \left\{ \begin{array}{l} \left(\cdot - \frac{1}{3}\gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_2 - \frac{1}{6}\gamma_3 \right) l_{x-1} \\ \left(\gamma_0 - \frac{1}{2}\gamma_1 - \gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_3 \right) l_x \\ \left(\cdot + \gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_3 \right) l_{x+1} \\ \left(\cdot - \frac{1}{6}\gamma_1 + \cdot + \frac{1}{6}\gamma_3 \right) l_{x+2} \end{array} \right\} \tag{56} $$

und:

$$ {}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \left\{ \begin{array}{l} v \left(\cdot - \frac{1}{3}\gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_2 - \frac{1}{6}\gamma_3 \right) D_{x-1} \\ (1) \left(\gamma_0 - \frac{1}{2}\gamma_1 - \gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_3 \right) D_x \\ \frac{1}{v} \left(\cdot + \gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_3 \right) D_{x+1} \\ \frac{1}{v^2} \left(\cdot - \frac{1}{6}\gamma_1 + \cdot + \frac{1}{6}\gamma_3 \right) D_{x+2} \end{array} \right\} \tag{57} $$

Es ergeben sich so die Formeln:

$$^{(m)}\mathfrak{N}_x = \mathfrak{g}\, N_x + \mathfrak{f}\, D_x + \mathfrak{K}_x\, D_x \tag{58}$$

$$^{(m)}\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|} = \mathfrak{g}\, \mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|} + \mathfrak{f}\,(1 - {}_nE_x) + {}_n\mathfrak{K}_x \tag{59}$$

$$\mathfrak{g} = 1 + \frac{(m^2-1)(11m^2+1)}{90\,m^4}\, i\,d - \frac{(m^2-1)(7m^2+2)}{360\,m^4}\,(i^2+d^2) \tag{60}$$

$$\mathfrak{f} = -\left[\frac{m-1}{2m} + \frac{(m^2-1)(11m^2+1)}{90\,m^4}\, i - \frac{(m^2-1)(7m^2+2)}{360\,m^4}\, i^2\right] \tag{61}$$

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{m^2-1}{12\,m^2}\,\varepsilon_x \tag{62}$$

$${}_n\mathfrak{K}_x = -\frac{m^2-1}{12\,m^2}\,\varepsilon_x\left[1 - {}_nE_x\,\frac{\varepsilon_{x+n}}{\varepsilon_x}\right] \tag{63}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2\,D_x}\left\{\begin{array}{l}\left[(1-d) - \dfrac{7m^2+2}{15\,m^2}\,(d-d^2)\right] D_{x-1} \\ -\left[(1+i) + \dfrac{7m^2+2}{15\,m^2}\,(i+i^2)\right] D_{x+1}\end{array}\right. \tag{64}$$

Fall VII. [1])

Die Funktion $l_{x+\tau}$ wird im Intervall $(x-1)$ bis $(x+2)$ als eine Parabel dritten Grades aufgefaßt, die für $(x-1)$, (x), $(x+1)$ und $(x+2)$ gleiche Funktionswerte besitzt wie die durch die Sterbetafel gegebene Funktion. Zins und Diskont werden für den Bruchteil eines Jahres nach der Exponentialmethode berechnet.

Bei der Berechnung von $D_{x+\frac{\lambda}{m}}$ wird die Zahl der Lebenden $l_{x+\frac{\lambda}{m}}$ nach der Exponentialmethode zunächst bis zum Anfang des Jahres und alsdann bis zum Alter Null zurückdiskontiert.

Es gilt die Ausgangsgleichung:

$$D_{x+\frac{\lambda}{m}} = v^x \cdot v^{\frac{\lambda}{m}}\left[c_0 + \frac{\lambda}{m}\,c_1 + \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 c_2 + \left(\frac{\lambda}{m}\right)^3 c_3\right] \tag{65}$$

Für die Koeffizienten c_0, c_1, c_2 und c_3 gelten die Gleichungen (50).

[1]) Siehe Literaturverzeichnis 8 (Sprague).

Für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ ergibt sich die Darstellung:

$$
{}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \frac{v^x}{m}\left\{\begin{array}{l}
(1)\ \left[c_0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\right] \\
v^{\frac{1}{m}}\left[c_0+\left(\frac{1}{m}\right)c_1+\left(\frac{1}{m}\right)^2 c_2+\left(\frac{1}{m}\right)^3 c_3\right] \\
v^{\frac{2}{m}}\left[c_0+\left(\frac{2}{m}\right)c_1+\left(\frac{2}{m}\right)^2 c_2+\left(\frac{2}{m}\right)^3 c_3\right] \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
v^{\frac{m-1}{m}}\left[c_0+\left(\frac{m-1}{m}\right)c_1+\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 c_2+\left(\frac{m-1}{m}\right)^3 c_3\right]
\end{array}\right\} \tag{66}
$$

Mit Verwendung der Summenformeln:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m}\left[1+v^{\frac{1}{m}}+v^{\frac{2}{m}}+\cdots\cdots\cdots+v^{\frac{m-1}{m}}\right] &= \delta_0 \\
\frac{1}{m^2}\left[\quad v^{\frac{1}{m}}+2\,v^{\frac{2}{m}}+\cdots\cdots+(m-1)\,v^{\frac{m-1}{m}}\right] &= \delta_1 \\
\frac{1}{m^3}\left[\quad v^{\frac{1}{m}}+2^2 v^{\frac{2}{m}}+\cdots\cdots+(m-1)^2 v^{\frac{m-1}{m}}\right] &= \delta_2 \\
\frac{1}{m^4}\left[\quad v^{\frac{1}{m}}+2^3 v^{\frac{2}{m}}+\cdots\cdots+(m-1)^3 v^{\frac{m-1}{m}}\right] &= \delta_3
\end{aligned} \tag{67}
$$

wobei:

$$
\begin{aligned}
\delta_0 &= \frac{d}{f_{(m)}} \\
\delta_1 &= \frac{d}{f^2_{(m)}}\,v^{\frac{1}{m}} - \frac{v}{f_{(m)}} \\
\delta_2 &= \frac{d}{f^3_{(m)}}\left(v^{\frac{1}{m}}+v^{\frac{2}{m}}\right) - \frac{2\,v}{f^2_{(m)}}\,v^{\frac{1}{m}} - \frac{v}{f_{(m)}} \\
\delta_3 &= \frac{d}{f^4_{(m)}}\left(v^{\frac{1}{m}}+4\,v^{\frac{2}{m}}+v^{\frac{3}{m}}\right) \\
&\quad -3\,\frac{v}{f^3_{(m)}}\left(v^{\frac{1}{m}}+v^{\frac{2}{m}}\right) \\
&\quad -3\,\frac{v}{f^2_{(m)}}\,v^{\frac{1}{m}} - \frac{v}{f_{(m)}}
\end{aligned} \tag{68}
$$

ergibt sich für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ folgende Darstellung:

$$ {}^{(m)}\mathfrak{D}_x = v^x \left[\delta_0\, c_0 + \delta_1\, c_1 + \delta_2\, c_2 + \delta_3\, c_3\right] \tag{69} $$

Mit Verwendung der Gleichungen (50) ergeben sich für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ weiter folgende Darstellungen:

$$ {}^{(m)}\mathfrak{D}_x = v^x \left\{ \begin{array}{l} \left(\cdot - \frac{1}{3}\,\delta_1 + \frac{1}{2}\,\delta_2 - \frac{1}{6}\,\delta_3\right) l_{x-1} \\ \left(\delta_0 - \frac{1}{2}\,\delta_1 - \delta_2 + \frac{1}{2}\,\delta_3\right) l_x \\ \left(\cdot + \delta_1 + \frac{1}{2}\,\delta_2 - \frac{1}{2}\,\delta_3\right) l_{x+1} \\ \left(\cdot - \frac{1}{6}\,\delta_1 \quad \cdot + \frac{1}{6}\,\delta_3\right) l_{x+2} \end{array} \right\} \tag{70} $$

und:

$$ {}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \left\{ \begin{array}{l} v\left(\cdot - \frac{1}{3}\,\delta_1 + \frac{1}{2}\,\delta_2 - \frac{1}{6}\,\delta_3\right) D_{x-1} \\ (1)\left(\delta_0 - \frac{1}{2}\,\delta_1 - \delta_2 + \frac{1}{2}\,\delta_3\right) D_x \\ \frac{1}{v}\left(\cdot + \delta_1 + \frac{1}{2}\,\delta_2 - \frac{1}{2}\,\delta_3\right) D_{x+1} \\ \frac{1}{v^2}\left(\cdot - \frac{1}{6}\,\delta_1 \quad \cdot + \frac{1}{6}\,\delta_3\right) D_{x+2} \end{array} \right\} \tag{71} $$

Es ergeben sich so die Formeln:

$$ {}^{(m)}\mathfrak{N}_x = \mathfrak{g}\, N_x + \mathfrak{f}\, D_x + \mathfrak{R}_x\, D_x \tag{72} $$

$$ {}^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|} = \mathfrak{g}\, \mathfrak{a}_{x\overline{n}|} + \mathfrak{f}\,(1 - {}_nE_x) + {}_n\mathfrak{R}_x \tag{73} $$

$$ \mathfrak{g} = \frac{i^2\, d^2}{6\, f^4_{(m)}} \left[\left\{ v^{\frac{1}{m}} + 4\, v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} \right\} - f^2_{(m)}\, v^{\frac{1}{m}} \right. \tag{74} $$

$$ \mathfrak{f} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(2-i)\,i}{6\, f^4_{(m)}} \left[v^{\frac{1}{m}} + 4\, v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} \right] \\ -\frac{1}{f^3_{(m)}} \left[v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} \right] \\ -\frac{(2-i)\,i}{6\, f^2_{(m)}}\, v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{f_{(m)}} \end{array} \right\} \tag{75} $$

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{u_{(-1)}\, D_{x-1} - u_{(+1)}\, D_{x+1}}{2\, D_x} \qquad (76)$$

$${}_n\mathfrak{K}_x = \mathfrak{K}_x\,(1 - {}_nE_x\,\frac{\mathfrak{K}_{x+n}}{\mathfrak{K}_x} \qquad (77)$$

$$u_{(-1)} = \left\{ \begin{array}{l} +\dfrac{d\,(1-d)}{3\,f^4_{(m)}}\left[v^{\frac{1}{m}} + 4\,v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}}\right] \\ -\dfrac{1-d}{f^3_{(m)}}\left[v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}}\right] \\ +\dfrac{(1-d)\,(3-d)}{3\,f^2_{(m)}}\,v^{\frac{1}{m}} \end{array} \right\} \qquad (78)$$

$$u_{(+1)} = \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{i\,(1+i)}{3\,f^4_{(m)}}\left[v^{\frac{1}{m}} + 4\,v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}}\right] \\ +\dfrac{1+i}{f^3_{(m)}}\left[v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}}\right] \\ +\dfrac{(1+i)\,(3+i)}{3\,f^2_{(m)}}\,v^{\frac{1}{m}} \end{array} \right\} \qquad (79)$$

Im Abschnitt E (Reihenentwicklungen) werden für $\mathfrak{g}$, $\overline{\mathfrak{f}}$, $u_{(-1)}$ und $u_{(+1)}$ Reihen abgeleitet, deren Glieder nach Potenzen von i steigen.

Die Reihendarstellungen lauten wie folgt:

$$\mathfrak{g} = 1 - \frac{(m^2-1)\,(11\,m^2+1)}{720\,m^4}\,i^4 + \frac{(m^2-1)\,(11\,m^2+1)}{360\,m^4}\,i^5 - + \cdots$$

$$\mathfrak{f} = -\frac{m-1}{2\,m} - \frac{(m^2-1)\,(11\,m^2+1)}{90\,m^4}\,i + \frac{(m^2-1)\,(11\,m^2+1)}{180\,m^4}\,i^2$$
$$- \frac{(m^2-1)\,(20\,m^4-m^2-1)}{756\,m^6}\,i^3 + \frac{(m^2-1)\,(169\,m^4-41\,m^2-20)}{10\,080\,m^6}\,i^4$$
$$- \frac{(m^2-1)\,(779\,m^6-301\,m^4-124\,m^2+6)}{64\,800\,m^8}\,i^5 + - \cdots$$

$$u_{(-1)} = \frac{m^2-1}{12\,m^2} - \frac{(m^2-1)\,(11\,m^2+1)}{90\,m^4}\,i + \frac{(m^2-1)\,(11\,m^2+1)}{72\,m^4}\,i^2$$
$$- \frac{(m^2-1)\,(271\,m^4+19\,m^2-2)}{1\,512\,m^6}\,i^3 + \frac{(m^2-1)\,(117\,m^4+5\,m^2-2)}{576\,m^6}\,i^4$$
$$- \frac{(m^2-1)\,(7297\,m^6+97\,m^4-197\,m^2+3)}{32\,400\,m^8}\,i^5 + - \cdots$$

$$u_{(+1)} = (1+i)^4 \left[\frac{m^2-1}{12\,m^2} - \frac{(m^2-1)(19\,m^2-1)}{90\,m^4}\,i + \frac{(m^2-1)(9\,m^2-1)}{24\,m^4}\,i^2 \right.$$
$$- \frac{(m^2-1)(863\,m^4-145\,m^2+2)}{1512\,m^6}\,i^3 + \frac{(m^2-1)(2750\,m^4-610\,m^2+20)}{3456\,m^6}\,i^4$$
$$\left. - \frac{(m^2-1)(33\,953\,m^6-9247\,m^4+497\,m^2-3)}{32\,400\,m^8}\,i^5 + - \cdots \right]$$

Abschnitt C.

Zusammenhang zwischen den Formeln für nachschußweise und vorschußweise zahlbare Leibrenten.

Es gelten die Formeln:

$$a_{x\overline{n}|} = \mathfrak{a}_{x\overline{n}|} - (1 - {}_nE_x) \tag{80}$$

$$\mathfrak{a}_{x\overline{n}|} = a_{x\overline{n}|} + (1 - {}_nE_x) \tag{81}$$

und

$${}^{(m)}a_{x\overline{n}|} = {}^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|} - \frac{1}{m}(1 - {}_nE_x) \tag{82}$$

$${}^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|} = {}^{(m)}a_{x\overline{n}|} + \frac{1}{m}(1 - {}_nE_x) \tag{83}$$

$${}^{(m)}a_{x\overline{n}|} = g\,a_{x\overline{n}|} + k(1 - {}_nE_x) + {}_nK_x \tag{84}$$

$${}^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|} = \mathfrak{g}\,\mathfrak{a}_{x\overline{n}|} + \mathfrak{k}(1 - {}_nE_x) + {}_n\mathfrak{K}_x \tag{85}$$

Wird Gleichung (84) von Gleichung (85) subtrahiert und werden die Gleichungen (81) und (83) berücksichtigt, so folgt:

$$\frac{1}{m} - (\mathfrak{g} + \mathfrak{k} - k) = \frac{\mathfrak{g} - g}{1 - {}_nE_x}\,a_{x\overline{n}|} + \frac{{}_n\mathfrak{K}_x - {}_nK_x}{1 - {}_nE_x} \tag{86}$$

Es ergeben sich daraus folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{g} = g \tag{87}$$

$${}_n\mathfrak{K}_x = {}_nK_x \tag{88}$$

$$\frac{1}{m} = \mathfrak{g} + \mathfrak{k} - k \tag{89}$$

Andere wertvolle Beziehungen zwischen den Formeln für die nachschußweise und vorschußweise zahlbare Leibrente folgen aus dem gegenseitigen Entsprechen von

$$i \text{ und } -d.$$

Es gelten nämlich folgende Sätze:

1. Satz. Wird in g (oder $\mathfrak{g}$) das Argument i durch das Argument $(-d)$ und umgekehrt $(-d)$ durch i ersetzt, so bleibt der Wert von g unverändert.

2. Satz. Wird in k das Argument i durch das Argument $(-d)$ und umgekehrt $(-d)$ durch i ersetzt, so ergibt sich der Wert von $-\mathfrak{k}$.

   Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes.

3. Satz. Wird in $u_{(-1)}$ das Argument i durch das Argument $(-d)$ und umgekehrt $(-d)$ durch i ersetzt, so ergibt sich der Wert von $u_{(+1)}$.

   Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes.

Hier bedeuten $u_{(-1)}$ und $u_{(+1)}$ die Faktoren von D_{x-1} und D_{x+1} in der Formel:

$$K_x = -\frac{u_{(-1)}\, D_{x-1} - u_{(+1)}\, D_{x+1}}{2\, D_x}$$

und K_x stellt ${}_nK_x$ für den Fall der lebenslänglichen Leibrente dar. Es gilt die Beziehung:

$${}_nK_x = K_x\left(1 - {}_nE_x \frac{K_{x+n}}{K_x}\right)$$

Um die hier erläuterten Zusammenhänge besonders deutlich werden zu lassen, werden nachfolgend die gewonnenen Formeln für die Funktionen g, $\mathfrak{g}$, k, $\mathfrak{k}$, K_x, $\mathfrak{K}_x$, $u_{(-1)}$ und $u_{(+1)}$ in einer zweckentsprechenden Form zusammengestellt:

Fall I.

$g = 1$	$\mathfrak{g} = 1$
$k = \frac{m-1}{2m}$	$\mathfrak{k} = -\frac{m-1}{2m}$

Fall II.

$g = 1 + \frac{m^2-1}{6m^2}\, id$	$\mathfrak{g} = 1 + \frac{m^2-1}{6m^2}\, di$
$k = \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{6m^2}\, d$	$\mathfrak{k} = -\left[\frac{m-1}{2m} + \frac{m^2-1}{6m^2}\, i\right]$

Fall III:

$$g = \frac{i\,d}{j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}} \qquad \mathfrak{g} = \frac{d\,i}{f^2_{(m)}}(1-d)^{\frac{1}{m}}$$

$$k = \frac{1}{j_{(m)}} - \frac{d}{j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}} \qquad \mathfrak{k} = -\left[\frac{1}{-f_{(m)}} + \frac{i}{f^2_{(m)}}(1-d)^{\frac{1}{m}}\right]$$

Hier ist zu beachten, daß $j_{(m)}$ nach Ersetzen von i durch $(-d)$ übergeht in $-f_{(m)}$.

Fall IV.

$$g = 1 \qquad \mathfrak{g} = 1$$

$$k = \frac{m-1}{2\,m} \qquad \mathfrak{k} = -\frac{m-1}{2\,m}$$

$$K_x = -\frac{m^2-1}{12\,m^2}(\mu_x+\delta) \qquad \mathfrak{K}_x = -\frac{m^2-1}{12\,m^2}(\mu_x+\delta)$$

Fall V.

$$g = 1 \qquad \mathfrak{g} = 1$$

$$k = \frac{m-1}{2\,m} \qquad \mathfrak{k} = -\frac{m-1}{2\,m}$$

$$K_x = -\frac{m^2-1}{12\,m^2}\,\varepsilon_x \qquad \mathfrak{K}_x = -\frac{m^2-1}{12\,m^2}\,\varepsilon_x$$

$$\varepsilon_x = \frac{D_{x-1} - D_{x+1}}{2\,D_x}$$

Fall VI.

$$g = 1 + \frac{(m^2-1)(11\,m^2+1)}{90\,m^4}\,i\,d - \frac{(m^2-1)(7\,m^2+2)}{360\,m^4}(i^2+d^2) \qquad \mathfrak{g} = 1 + \frac{(m^2-1)(11\,m^2+1)}{90\,m^4}\,d\,i - \frac{(m^2-1)(7\,m^2+2)}{360\,m^4}(d^2+i^2)$$

$$k = \frac{m-1}{2\,m} - \frac{(m^2-1)(11\,m^2+1)}{90\,m^4}\,d - \frac{(m^2-1)(7\,m^2+2)}{360\,m^4}\,d^2 \qquad \mathfrak{k} = -\left[\frac{m-1}{2\,m} + \frac{(m^2-1)(11\,m^2+1)}{90\,m^4}\,i - \frac{(m^2-1)(7\,m^2+2)}{360\,m^4}\,i^2\right]$$

$$K_x = -\frac{u_{(-1)}\,D_{x-1} - u_{(+1)}\,D_{x+1}}{2\,D_x} \qquad \mathfrak{K}_x = -\frac{u_{(-1)}\,D_{x-1} - u_{(+1)}\,D_{x+1}}{2\,D_x}$$

$$u_{(-1)} = \frac{m^2-1}{12\,m^2}\left[(1-d) + \frac{7\,m^2+2}{15\,m^2}(-d+d^2)\right]$$

$$u_{(+1)} = \frac{m^2-1}{12\,m^2}\left[(1+i) + \frac{7\,m^2+2}{15\,m^2}(i+i^2)\right]$$

Fall VII.

$$g = \frac{i^2\,d^2}{6\,j^4_{(m)}}\left[\left\{(1+i)^{\frac{1}{m}} + 4\,(1+i)^{\frac{2}{m}} + (1+i)^{\frac{3}{m}}\right\} - j^2_{(m)}\,(1+i)^{\frac{1}{m}}\right]$$

$$k = \left\{\begin{array}{l} \frac{(2+d)\,d}{6\,j^4_{(m)}}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + 4\,(1+i)^{\frac{2}{m}} + (1+i)^{\frac{3}{m}}\right] \\ -\frac{1}{j^3_{(m)}}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + (1+i)^{\frac{2}{m}}\right] \\ -\frac{(2+d)\,d}{6\,j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{j_{(m)}} \end{array}\right\}$$

$$K_x = -\frac{u_{(-1)}\,D_{x-1} - u_{(+1)}\,D_{x+1}}{2\,D_x}$$

$$\mathfrak{g} = \frac{d^2\,i^2}{6\,f^4_{(m)}}\left[\left\{(1-d)^{\frac{1}{m}} + 4\,(1-d)^{\frac{2}{m}} + (1-d)^{\frac{3}{m}}\right\} - f^2_{(m)}\,(1-d)^{\frac{1}{m}}\right]$$

$$\mathfrak{k} = -\left\{\begin{array}{l} \frac{-(2-i)\,i}{6\,f^4_{(m)}}\left[(1-d)^{\frac{1}{m}} + 4\,(1-d)^{\frac{2}{m}} + (1-d)^{\frac{3}{m}}\right] \\ +\frac{1}{f^3_{(m)}}\left[(1-d)^{\frac{1}{m}} + (1-d)^{\frac{2}{m}}\right] \\ +\frac{(2-i)\,i}{6\,f^2_{(m)}}(1-d)^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{f_{(m)}} \end{array}\right\}$$

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{u_{(-1)}\,D_{x-1} - u_{(+1)}\,D_{x+1}}{2\,D_x}$$

$$u_{(-1)} = \frac{d\,(1-d)}{3\,f^4_{(m)}}\left[(1-d)^{\frac{1}{m}} + 4\,(1-d)^{\frac{2}{m}} + (1-d)^{\frac{3}{m}}\right] - \frac{1-d}{f^3_{(m)}}\left[(1-d)^{\frac{1}{m}} + (1-d)^{\frac{2}{m}}\right] + \frac{(1-d)\,(3-d)}{3\,f^2_{(m)}}(1-d)^{\frac{1}{m}}$$

$$u_{(+1)} = -\frac{i\,(1+i)}{3\,j^4_{(m)}}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + 4\,(1+i)^{\frac{2}{m}} + (1+i)^{\frac{3}{m}}\right] + \frac{1+i}{j^3_{(m)}}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + (1+i)^{\frac{2}{m}}\right] + \frac{(1+i)\,(3+i)}{3\,j^2_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}}$$

Hier ist zu beachten, daß $j_{(m)}$ nach Ersetzen von i durch $(-d)$ übergeht in $-f_{(m)}$.

Abschnitt D.

Eulersche Summenformel und Parabelfunktionen.

Die auf Grund des Falles IV in den Abschnitten A und B abgeleiteten Formeln werden gewöhnlich unter Zuhilfenahme der Eulerschen Summenformel[1]) abgeleitet, welche wie folgt lautet:

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1}\varphi\left(a+\frac{\lambda}{m}\right) &= \int_0^1 \varphi(a+\tau)\,d\tau + \frac{1}{2m}[\varphi(a)-\varphi(a+1)] \\ &- \frac{1}{m^2}\frac{B_2}{2!}[\varphi'(a)-\varphi'(a+1)] \\ &- \frac{1}{m^4}\cdot\frac{B_4}{4!}[\varphi^{(3)}(a)-\varphi^{(3)}(a+1)] \qquad (90) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &- \frac{1}{m^{2s}}\cdot\frac{B_{2s}}{(2s)!}[\varphi^{(2s-1)}(a)-\varphi^{(2s-1)}(a+1)]\end{aligned}$$

Die Ausdrücke $\varphi'(a)$, $\varphi'(a+1)$, $\varphi^{(3)}(a)$, $\varphi^{(3)}(a+1)$ u.s.w. stellen die erste, dritte und die höheren Ableitungen der Funktion $\varphi(a+\tau)$ an der Stelle $\tau=0$ beziehungsweise $\tau=1$ dar.

Die Koeffizienten B_2, $B_4\ldots$ sind die Bernoullischen Zahlen, nämlich:

$$B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42} \qquad (91)$$

[1]) Siehe Literaturverzeichnis 7 (Pascal) und 3 (Text-Book II Chap. XXIV).

Für diese gilt die symbolische Gleichung:

$$(B+1)^s - B^s = s \tag{92}$$

in der nach Ausrechnung B^s durch B_s zu ersetzen ist.

Bei Beschränkung auf die Reihenglieder bis und mit der ersten Ableitung der Funktion $\varphi(a+\tau)$ führt die Eulersche Summenformel genau auf die in den Abschnitten A und B abgeleiteten Formeln für den Barwert der unterjährigen Rente.

Im Folgenden wird diese Ableitung mitgeteilt.

Gemäß Abschnitt A und B gelten die Bezeichnungen:

$${}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \frac{1}{m}\left[D_x + D_{x+\frac{1}{m}} + \cdots\cdots + D_{x+\frac{m-1}{m}}\right] \tag{93}$$

und

$${}^{(m)}D_{x+1} = \frac{1}{m}\left[D_{x+\frac{1}{m}} + D_{x+\frac{2}{m}} + \cdots\cdots + D_{x+\frac{m}{m}}\right] \tag{94}$$

zwischen denen die Beziehung besteht:

$${}^{(m)}D_{x+1} = {}^{(m)}\mathfrak{D}_x - \frac{1}{m}[D_x - D_{x+1}] \tag{95}$$

Bei Beschränkung auf die Reihenglieder bis und mit der ersten Ableitung ergibt sich auf Grund der Eulerschen Summenformel:

$$\begin{aligned} {}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \int_0^1 D_{x+\tau}\, d\tau + \frac{1}{2m}[D_x - D_{x+1}] \\ - \frac{1}{12m^2}[D'_x - D'_{x+1}] \end{aligned} \tag{96}$$

Für $m=1$ gilt entsprechend die Gleichung:

$$\begin{aligned} D_x = \int_0^1 D_{x+\tau}\, d\tau + \frac{1}{2}[D_x - D_{x+1}] \\ - \frac{1}{12}[D'_x - D'_{x+1}] \end{aligned} \tag{97}$$

Wird Gleichung (97) von Gleichung (96) subtrahiert, so ergibt sich nach einigen Umformungen die Gleichung:

$${}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \frac{m+1}{2m} D_x + \frac{m-1}{2m} D_{x+1} + \frac{m^2-1}{12m^2}(D'_x - D'_{x+1}) \tag{98}$$

Mit Berücksichtigung von Gleichung (95) ergibt sich daraus auch eine entsprechende Gleichung für ${}^{(m)}D_{x+1}$, nämlich:

$$ {}^{(m)}D_{x+1} = \frac{m-1}{2m} D_x + \frac{m+1}{2m} D_{x+1} + \frac{m^2-1}{12m^2} (D'_x - D'_{x+1}) \qquad (99) $$

Die Gleichungen (98) und (99) stimmen in der Tat mit den früher gewonnenen Gleichungen (32) der Abschnitte A und B überein.

Das Ergebnis dieser Untersuchung kann wie folgt zusammengefaßt werden:

1. Satz. Bei Beschränkung auf die Reihenglieder bis und mit der ersten Ableitung ergeben sich auf Grund der Eulerschen Summenformel genau die gleichen Formeln für den Barwert der unterjährig zahlbaren Leibrente, wie wenn diese Formeln auf Grund der Annahme hergeleitet werden, daß $D_{x+\tau}$ im Abschnitt x bis $(x+1)$ durch eine Parabel dritten Grades darstellbar sei, wobei die ursprüngliche Funktion $D_{x+\tau}$ und die Parabel in den Punkten x und $(x+1)$ gleiche Funktionswerte und auch gleiche Tangenten besitzen.

Der Satz 1 ist nur ein Spezialfall des nachfolgenden allgemeineren Satzes 2.

2. Satz. Bei Beschränkung auf die Reihenglieder bis und mit der $(2s-1)$ten Ableitung ergeben sich auf Grund der Eulerschen Summenformel genau die gleichen Formeln für den Barwert der unterjährig zahlbaren Leibrente, wie wenn diese Formeln auf Grund der Annahme hergeleitet werden, daß $D_{x+\tau}$ im Abschnitt x bis $(x+1)$ durch eine Parabel $(2s+1)$ten Grades darstellbar sei, wobei die ursprüngliche Funktion $D_{x+\tau}$ und die Parabel in den Punkten x und $(x+1)$ gleiche Funktionswerte und auch gleiche erste, dritte, fünfte, $(2s-1)$te Ableitungen besitzen.

Im Folgenden möge die Richtigkeit des Satzes 2 für den Fall einer Parabel siebenten Grades nachgewiesen werden.

a) Ableitung auf Grund der Eulerschen Summenformel.

Gemäß Satz 2 sind die Reihenglieder bis und mit der fünften Ableitung zu berücksichtigen. Die Formel für ${}^{(m)}\mathfrak{D}_x$ lautet in diesem Falle:

$$\begin{aligned} {}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \int_0^1 D_{x+\tau}\, d\tau &+ \frac{1}{2m}[D_x - D_{x+1}] \\ &- \frac{1}{12\,m^2}[D'_x - D'_{x+1}] \\ &+ \frac{1}{720\,m^4}[D^{(3)}_x - D^{(3)}_{x+1}] \\ &- \frac{1}{30\,240\,m^6}[D^{(5)}_x - D^{(5)}_{x+1}] \end{aligned} \tag{100}$$

Ferner gilt entsprechend die Gleichung:

$$\begin{aligned} D_x = \int_0^1 D_{x+\tau}\, d\tau &+ \frac{1}{2}[D_x - D_{x+1}] \\ &- \frac{1}{12}[D'_x - D'_{x+1}] \\ &+ \frac{1}{720}[D^{(3)}_x - D^{(3)}_{x+1}] \\ &- \frac{1}{30\,240}[D^{(5)}_x - D^{(5)}_{x+1}] \end{aligned} \tag{101}$$

Wird Gleichung (101) von Gleichung (100) subtrahiert, so ergibt sich nach einigen Umformungen die Gleichung:

$$\begin{aligned} {}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \frac{m+1}{2m} D_x + \frac{m-1}{2m} D_{x+1} \\ + \frac{m^2-1}{12\,m^2}[D'_x - D'_{x+1}] \\ + \frac{m^4-1}{720\,m^4}[D^{(3)}_x - D^{(3)}_{x+1}] \\ + \frac{m^6-1}{30\,240\,m^6}[D^{(5)}_x - D^{(5)}_{x+1}] \end{aligned} \tag{102}$$

Mit Verwendung von Gleichung (95) gilt ferner die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
{}^{(m)}D_{x+1} = {} & \frac{m-1}{2m} D_x + \frac{m+1}{2m} D_{x+1} \\
& + \frac{m^2-1}{12m^2} [D'_x - D'_{x+1}] \\
& + \frac{m^4-1}{720m^4} [D^{(3)}_x - D^{(3)}_{x+1}] \\
& + \frac{m^6-1}{30\,240m^6} [D^{(5)}_x - D^{(5)}_{x+1}]
\end{aligned}
\tag{103}
$$

Für das höchste Alter ω der Sterbetafel ist:

$$D_\omega = D'_\omega = D^{(3)}_\omega = D^{(5)}_\omega = 0 \tag{104}$$

Deshalb gelten die Formeln:

$${}^{(n)}\mathfrak{N}_x = N_x - \frac{m-1}{2m} D_x + \frac{m^2-1}{12m^2} D'_x + \frac{m^4-1}{720m^4} D^{(3)}_x + \frac{m^6-1}{30\,240m^6} D^{(5)}_x \tag{105}$$

$${}^{(n)}N_{x+1} = N_{x+1} + \frac{m-1}{2m} D_x + \frac{m^2-1}{12m^2} D'_x + \frac{m^4-1}{720m^4} D^{(3)}_x + \frac{m^6-1}{30\,240m^6} D^{(5)}_x \tag{106}$$

$${}^{(n)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|} = \mathfrak{a}_{x\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) + {}_n\mathfrak{K}_x \tag{107}$$

$${}^{(n)}a_{x\overline{n}|} = a_{x\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) + {}_nK_x \tag{108}$$

wobei:

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathfrak{K}_x = {}_nK_x = {} & \frac{m^2-1}{12m^2} \varepsilon^{(1)}_x \left(1 - {}_nE_x \frac{\varepsilon^{(1)}_{x+n}}{\varepsilon^{(1)}_x}\right) + \frac{m^4-1}{720m^4} \varepsilon^{(3)}_x \left(1 - {}_nE_x \frac{\varepsilon^{(3)}_{x+n}}{\varepsilon^{(3)}_x}\right) \\
& + \frac{m^6-1}{30\,240m^6} \varepsilon^{(5)}_x \left(1 - {}_nE_x \frac{\varepsilon^{(5)}_{x+n}}{\varepsilon^{(5)}_x}\right)
\end{aligned}
\tag{109}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{(1)}_x &= \frac{D'_x}{D_x} \\
\varepsilon^{(3)}_x &= \frac{D^{(3)}_x}{D_x} \\
\varepsilon^{(5)}_x &= \frac{D^{(5)}_x}{D_x}
\end{aligned}
\tag{110}
$$

b) Ableitung auf Grund der Annahme, daß $D_{x+\tau}$ im Abschnitt x bis $(x+1)$ durch eine Parabel siebenten Grades dargestellt werde.

Gemäß Annahme verläuft die Funktion $D_{x+\tau}$ im Abschnitt x bis $(x+1)$ wie eine Parabel siebenten Grades und ferner sind für $\tau = 0$ und $\tau = 1$ die Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} D_{x+\tau} \text{ (nach der Parabel)} &= D_{x+\tau} \text{ (nach der Sterbetafel)} \\ D'_{x+\tau} \text{ (nach der Parabel)} &= D'_{x+\tau} \text{ (nach der Sterbetafel)} \\ D^{(3)}_{x+\tau} \text{ (nach der Parabel)} &= D^{(3)}_{x+\tau} \text{ (nach der Sterbetafel)} \\ D^{(5)}_{x+\tau} \text{ (nach der Parabel)} &= D^{(5)}_{x+\tau} \text{ (nach der Sterbetafel)} \end{aligned}$$

Es gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} D_{x+\tau} &= a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + a_5\tau^5 + a_6\tau^6 + a_7\tau^7 \\ D'_{x+\tau} &= a_1 + 2a_2\tau + 3a_3\tau^2 + 4a_4\tau^3 + 5a_5\tau^4 + 6a_6\tau^5 + 7a_7\tau^6 \\ D^{(3)}_{x+\tau} &= 6a_3 + 24a_4\tau + 60a_5\tau^2 + 120a_6\tau^3 + 210a_7\tau^4 \\ D^{(5)}_{x+\tau} &= 120a_5 + 720a_6\tau + 2520a_7\tau^2 \end{aligned} \qquad (111)$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} D_x + D_{x+t} &= 2a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + a_7 t^7 \\ D'_x - D'_{x+t} &= -2a_2 t - 3a_3 t^2 - 4a_4 t^3 - 5a_5 t^4 - 6a_6 t^5 - 7a_7 t^6 \\ D^{(3)}_x - D^{(3)}_{x+t} &= -24a_4 t - 60a_5 t^2 - 120a_6 t^3 - 210a_7 t^4 \\ D^{(5)}_x - D^{(5)}_{x+t} &= -720a_6 t - 2520a_7 t^2 \end{aligned} \qquad (112)$$

Mit Verwendung der Abkürzungen:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{t}{2}(D_x + D_{x+t}) \\ u_1 &= \frac{t^2}{12}(D'_x - D'_{x+t}) \\ u_3 &= -\frac{t^4}{720}(D^{(3)}_x - D^{(3)}_{x+t}) \\ u_5 &= \frac{t^6}{30\,240}(D^{(5)}_x - D^{(5)}_{x+t}) \\ S &= u_0 + u_1 + u_3 + u_5 \end{aligned} \qquad (113)$$

ergeben sich ferner die Formeln:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= a_0 t + \frac{1}{2} a_1 t^2 + \frac{1}{2} a_2 t^3 + \frac{1}{2} a_3 t^4 + \frac{1}{2} a_4 t^5 + \frac{1}{2} a_5 t^6 + \frac{1}{2} a_6 t^7 + \frac{1}{2} a_7 t^8 \\
u_1 &= -\frac{1}{6} a_2 t^3 - \frac{1}{4} a_3 t^4 - \frac{1}{3} a_4 t^5 - \frac{5}{12} a_5 t^6 - \frac{1}{2} a_6 t^7 - \frac{7}{12} a_7 t^8 \\
u_3 &= +\frac{1}{30} a_4 t^5 + \frac{1}{12} a_5 t^6 + \frac{1}{6} a_6 t^7 + \frac{7}{24} a_7 t^8 \qquad (114) \\
u_5 &= -\frac{1}{42} a_6 t^7 - \frac{7}{84} a_7 t^8 \\
S &= a_0 t + \frac{1}{2} a_1 t^2 + \frac{1}{3} a_2 t^3 + \frac{1}{4} a_3 t^4 + \frac{1}{5} a_4 t^5 + \frac{1}{6} a_5 t^6 + \frac{1}{7} a_6 t^7 + \frac{1}{8} a_7 t^8
\end{aligned}
$$

Nun ist aber auch:

$$S = \int_0^t (a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 + a_4 \tau^4 + a_5 \tau^5 + a_6 \tau^6 + a_7 \tau^7)\, d\tau \qquad (115)$$

Also ist:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t D_{x+\tau}\, d\tau = \frac{t}{2} [D_x + D_{x+t}] &+ \frac{t^2}{12} [D'_x - D'_{x+t}] \\
&- \frac{t^4}{720} [D^{(3)}_x - D^{(3)}_{x+t}] \qquad (116) \\
&+ \frac{t^6}{30\,240} [D^{(5)}_x - D^{(5)}_{x+t}]
\end{aligned}
$$

Wird in Gleichung (116) an Stelle von t nacheinander $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots \frac{m}{m}$ gesetzt, so ergeben sich m verschiedene Gleichungen. Durch Addition dieser m Gleichungen ergibt sich unter Berücksichtigung der Identität:

$$\int_0^1 D_{x+\tau}\, d\tau = \int_0^{\frac{1}{m}} D_{x+\tau}\, d\tau + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} D_{x+\tau}\, d\tau + \cdots\cdots + \int_{\frac{m-1}{m}}^{\frac{m}{m}} D_{x+\tau}\, d\tau \qquad (117)$$

und nach Vornahme von einigen Umformungen die Formel:

$$
\begin{aligned}
{}^{(m)}\mathfrak{D}_x = \int_0^1 D_{x+\tau}\, d\tau &+ \frac{1}{2m} (D_x - D_{x+1}) - \frac{1}{12 m^2} (D'_x - D'_{x+1}) \\
&+ \frac{1}{720 m^4} (D^{(3)}_x - D^{(3)}_{x+1}) - \frac{1}{30\,240 m^6} (D^{(5)}_x - D^{(5)}_{x+1})
\end{aligned} \qquad (118)
$$

Diese Formel stimmt genau mit der Formel (100) überein. Die Ableitung auf Grund der Annahme, daß die Funktion $D_{x+\tau}$ durch eine Parabel siebenten Grades darstellbar sei, führt also auf die gleichen Formeln für den Barwert der unterjährigen Rente wie die Ableitung auf Grund der Euler'schen Summenformel.

Für die Praxis dürfte es vollkommen genügen, wenn bei der Ableitung der Formeln für den Barwert der unterjährigen Rente von der Annahme ausgegangen wird, daß die Funktion $D_{x+\tau}$ im Abschnitt x bis $(x+1)$ durch eine Parabel dritten Grades darstellbar sei.

Bekanntlich stellt die in der Eulerschen Summenformel auftretende Reihe eine semikonvergente Reihe dar. Es existiert also für jede Summe von der Form:

$$\frac{1}{m}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1}\varphi\left(a+\frac{\lambda}{m}\right)$$

sofern $\varphi\left(a+\frac{\lambda}{m}\right)$ eine analytische Funktion darstellt, eine bestimmte Zahl k so, daß die Annäherung an den wahren Wert der Summe, die auf Grund der Eulerschen Summenformel erzielt werden kann, bei Beschränkung auf die Reihenglieder bis und mit der $(2k-1)$ten Ableitung eine größte ist. Werden weniger oder mehr Glieder der Reihe verwendet, so wird die Annäherung geringer.

Was hier von der Zahl der Reihenglieder gesagt worden ist, gilt entsprechend auch für den Grad der Parabel, die in einem gewissen Abschnitt an die Stelle einer analytischen Funktion gesetzt werden soll: Eine Parabel höheren Grades führt unter Umständen zu einer weniger guten Annäherung als eine Parabel niedrigeren Grades.

Abschnitt E.

Reihenentwicklungen.

1. Vorbereitungen.

Die in den Fällen III und VII für die Funktionen g, $\mathfrak{g}$, k, $\mathfrak{k}$, $u_{(-1)}$, $u_{(+1)}$ abgeleiteten Formeln können durch Reihenentwicklungen für das praktische Rechnen zweckmäßiger gestaltet werden.

Die Reihenentwicklungen der genannten Funktionen nach steigenden Potenzen von i stehen in einem bemerkenswerten Zusammenhang mit der Reihe von $\frac{1}{j_{(m)}}$. Im Folgenden wird dieser Zusammenhang abgeleitet. Dabei werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$j = j_{(m)} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \tag{119}$$

$$\varrho = (1+i)^{\frac{1}{m}} \tag{120}$$

$$\psi_1 = \frac{1}{j} \tag{121}$$

$$\psi_2 = \frac{\varrho}{j^2} \tag{122}$$

$$\psi_3 = \frac{\varrho + \varrho^2}{j^3} \tag{123}$$

$$\psi_4 = \frac{\varrho + 4\varrho^2 + \varrho^3}{j^4} \tag{124}$$

Auf Grund der vorstehenden Abkürzungen lassen sich die Funktionen für die im Folgenden eine Reihendarstellung abgeleitet wird, wie folgt schreiben:

Zu Fall III.

$$g = i^2 v \psi_2 \tag{125}$$

$$k = \psi_1 - i v \psi_2 \tag{126}$$

$$\mathfrak{k} = k - g + \frac{1}{m} \tag{127}$$

Zu Fall VII.

$$g = \frac{i^4 v^2}{6}(\psi_4 - \psi_2) \tag{128}$$

$$k = \frac{(2+3i) i v^2}{6}(\psi_4 - \psi_2) - \psi_3 + \psi_1 \tag{129}$$

$$u_{(-1)} = \frac{i v^2}{3}\psi_4 - v\psi_3 + \frac{(3+2i) v^2}{3}\psi_2 \tag{130}$$

$$u_{(+1)} = -\frac{i(1+i)}{3}\psi_4 + (1+i)\psi_3 + \frac{(1+i)(3+i)}{3}\psi_2 \tag{131}$$

$$\mathfrak{k} = k - g + \frac{1}{m} \tag{132}$$

2. Die Ableitungen der Funktion $\psi_1 = \frac{1}{j}$.

Aus der Darstellung:

$$\psi_1 \cdot j = 1 \tag{133}$$

ergeben sich durch wiederholte Differentiation nach i die Formeln:

$$\psi_1 j' + \psi_1' j = 0 \tag{134}$$

$$\psi_1 j'' + 2\psi_1' j' + \psi_1'' j = 0 \tag{135}$$

$$\psi_1 j''' + 3\psi_1' j'' + 3\psi_1'' j' + \psi_1''' j = 0 \tag{136}$$

Mit Verwendung der Formeln:

$$j = m(\varrho - 1) \tag{137}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{\varrho - 1}{j} \tag{138}$$

ergeben sich folgende Darstellungen für die Ableitungen der Funktion j:

$$j' = v\varrho \tag{139}$$

$$j'' = v^2\varrho\left(\frac{\varrho-1}{j}-1\right) \tag{140}$$

$$j''' = v^3\varrho\left(\frac{\varrho-1}{j}-1\right)\left(\frac{\varrho-1}{j}-2\right) \tag{141}$$

Durch Auflösung der Gleichungen (134) bis (136) nach ψ', ψ'' und ψ''' und mit Verwendung der Formeln (121) bis (124), sowie (139) bis (141) ergeben sich folgende Darstellungen:

$$\psi_1' = -v\psi_2 \tag{142}$$

$$\psi_1'' = v^2(\psi_3+\psi_2) \tag{143}$$

$$\psi_1''' = -v^3(\psi_4+3\psi_3+2\psi_2) \tag{144}$$

Die vorstehenden Gleichungen nach ψ_2, ψ_3, ψ_4 aufgelöst, ergeben folgende Formeln:

$$\psi_2 = -(1+i)\psi_1' \tag{145}$$

$$\psi_3 = (1+i)\psi_1' + (1+i)^2\psi_1'' \tag{146}$$

$$\psi_4 = -[(1+i)\psi_1' + 3(1+i)^2\psi_1'' + (1+i)^3\psi_1'''] \tag{147}$$

3. Die Reihendarstellung der Funktion $\psi_1 = \frac{1}{j}$.

Für j ergibt sich leicht die Reihendarstellung:

$$j = i[1 + A_1 i + A_2 i^2 + A_3 i^3 + \cdots\cdots] \tag{148}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{m-1}{2m} \\
A_2 &= \frac{(m-1)(2m-1)}{6m^2} \\
A_3 &= -\frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{24m^3} \\
A_4 &= \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)(4m-1)}{120m^4} \\
A_5 &= -\frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)(4m-1)(5m-1)}{720m^5} \\
A_s &= (-1)^s\frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)\cdot\cdots\cdot(sm-1)}{(s+1)!\,m^s}
\end{aligned} \tag{149}$$

Ausgehend von der Darstellung:

$$i\,\psi_1 = 1 + B_1\,i + B_2\,i^2 + B_3\,i^3 + \cdots\cdots \tag{150}$$

und mit Verwendung der Reihendarstellung (148) ergeben sich folgende Rekursionsformeln zur Bestimmung der Koeffizienten $B_1,\ B_2,\ B_3 \ldots$:

$$\begin{aligned} &A_1 + B_1 = 0 \\ &A_2 + A_1\,B_1 + B_2 = 0 \\ &A_3 + A_2\,B_1 + A_1\,B_2 + B_3 = 0 \end{aligned} \tag{151}$$

u. s. w.

$$A_s + A_{s-1}\,B_1 + A_{s-2}\,B_2 + \cdots\cdots + A_2\,B_{s-2} + A_1\,B_{s-1} + B_s = 0$$

Die Koeffizienten $B_1,\ B_2,\ B_3 \ldots$ lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{m-1}{2\,m} \\ B_2 &= -\frac{m^2-1}{12\,m^2} \\ B_3 &= \frac{m^2-1}{24\,m^2} \\ B_4 &= -\frac{(m^2-1)(19\,m^2-1)}{720\,m^4} \\ B_5 &= \frac{(m^2-1)(9\,m^2-1)}{480\,m^4} \\ B_6 &= -\frac{(m^2-1)(863\,m^4-145\,m^2+2)}{60\,480\,m^6} \\ B_7 &= \frac{(m^2-1)(275\,m^4-61\,m^2+2)}{24\,192\,m^6} \\ B_8 &= -\frac{(m^2-1)(33\,953\,m^6-9247\,m^4+497\,m^2-3)}{3\,628\,800\,m^8} \end{aligned} \tag{152}$$

Die Koeffizienten $B_2,\ B_3 \ldots$ enthalten wie ersichtlich den Faktor $(m^2 - 1)$. Um auf Grund der Rekursionsformel zeigen zu können, daß jeder folgende Koeffizient den Faktor $(m^2 - 1)$ ebenfalls aufweist, falls die vorhergehenden Koeffizienten bis herab zu B_2 denselben enthalten, schreiben wir die Rekursionsformel wie folgt:

$$-B_s = (A_s + A_{s-1}\,B_1) + (A_{s-2}\,B_2 + \cdots\cdots + A_1\,B_{s-1})$$

Der zweite Klammerausdruck enthält den Faktor $(m^2 - 1)$, weil nach der getroffenen Voraussetzung feststeht, daß die einzelnen Koeffizienten B_2, B_3, ... B_{s-1} diesen enthalten.

Der erste Klammerausdruck läßt sich auf Grund der Formeln (149) und (152) wie folgt darstellen:

$$(-1)^s \frac{(m-1)(2m-1)\cdots(sm-1)}{(s+1)!\, m^s} + (-1)^{s-1} \frac{(m-1)(2m-1)\cdots[(s-1)m-1]}{s!\, m^{s-1}} \frac{m-1}{2m}$$

$$= (m^2-1)(s-1)(-1)^s \frac{(2m-1)(3m-1)\cdots\cdots[(s-1)m-1]}{2(s+1)!\, m^s}$$

Da $(m^2 - 1)$ sowohl im ersten wie im zweiten Klammerausdruck als Faktor auftritt, so ist $(m^2 - 1)$ auch Faktor des Koeffizienten B_s.

4. Reihenentwicklungen zu Fall III.

Gemäß Formel (125) ist:

$$g = i^2 v \psi_2 \tag{153}$$

Mit Verwendung der Formel (145) kann dieser Ausdruck wie folgt umgeformt werden:

$$g = -i^2 \psi_1' \tag{154}$$

Auf Grund der Darstellung (150) ergeben sich folgende Reihen:

$$\psi_1 = \frac{1}{i} + B_1 + B_2 i + B_3 i^2 + B_4 i^3 + \cdots\cdots \tag{155}$$

$$\psi_1' = -\frac{1}{i^2} + 0 + B_2 + 2B_3 i + 3B_4 i^2 + \cdots\cdots \tag{156}$$

$$-i^2 \psi_1' = 1 + 0 - B_2 i^2 - 2B_3 i^3 - 3B_4 i^4 - \cdots\cdots \tag{157}$$

Die Koeffizienten C_0, C_1, C_2, C_3... der Reihendarstellung:

$$g = C_0 + C_1 i + C_2 i^2 + C_3 i^3 + \cdots\cdots \tag{158}$$

lauten demnach wie folgt:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_1 &= 0 \\ C_2 &= -B_2 = \frac{m^2-1}{12m^2} \end{aligned} \tag{159}$$

$$C_3 = -2B_3 = -\frac{m^2-1}{12m^2}$$

$$C_4 = -3B_4 = \frac{(m^2-1)(19m^2-1)}{240m^4} \qquad (159)$$

$$C_5 = -4B_5 = -\frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{120m^4}$$

$$C_s = -(s-1)B_s$$

Gemäß Formel (126) ist:

$$k = \psi_1 - iv\psi_2 \qquad (160)$$

Mit Verwendung der Formel (145) kann dieser Ausdruck wie folgt umgeformt werden:

$$k = \psi_1 + i\psi_1' \qquad (161)$$

Auf Grund der Darstellung (150) ergeben sich folgende Reihen:

$$\psi_1 = \frac{1}{i} + B_1 + B_2 i + B_3 i^2 + B_4 i^3 + \cdots\cdots \qquad (162)$$

$$i\psi_1' = -\frac{1}{i} + 0 + B_2 i + 2B_3 i^2 + 3B_4 i^3 + \cdots\cdots \qquad (163)$$

$$\psi_1 + i\psi_1' = B_1 + 2B_2 i + 3B_3 i^2 + 4B_4 i^3 + \cdots\cdots \qquad (164)$$

Die Koeffizienten D_0, D_1, D_2, D_3... der Reihendarstellung

$$k = D_0 + D_1 i + D_2 i^2 + D_3 i^3 + \cdots\cdots \qquad (165)$$

lauten demnach wie folgt:

$$D_0 = B_1 = \frac{m-1}{2m}$$

$$D_1 = 2B_2 = -\frac{m^2-1}{6m^2}$$

$$D_2 = 3B_3 = \frac{m^2-1}{8m^2} \qquad (166)$$

$$D_3 = 4B_4 = -\frac{(m^2-1)(19m^2-1)}{180m^4}$$

$$D_4 = 5\,B_5 = \frac{(m^2-1)(9\,m^2-1)}{96\,m^4}$$

$$D_5 = 6\,B_6 = -\frac{(m^2-1)(863\,m^4-145\,m^2+2)}{10\,080\,m^6} \qquad (166)$$

$$D_s = (s+1)\,B_{s+1}$$

Gemäß Formel (127) ist

$$\mathfrak{k} = k - g + \frac{1}{m} \qquad (167)$$

Für die Koeffizienten $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$, ... der Reihendarstellung:

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_1\,i + \mathfrak{D}_2\,i^2 + \mathfrak{D}_3\,i^3 + \cdots \qquad (168)$$

gelten die Beziehungen:

$$\mathfrak{D}_0 = D_0 - C_0 + \frac{1}{m} \qquad (169)$$

$$\mathfrak{D}_s = D_s - C_s \qquad \text{für } s \geqslant 1 \qquad (170)$$

Die Koeffizienten $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$, ... lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_0 &= -\frac{m-1}{2\,m} \\
\mathfrak{D}_1 &= -\frac{m^2-1}{6\,m^2} \\
\mathfrak{D}_2 &= \frac{m^2-1}{24\,m^2} \\
\mathfrak{D}_3 &= -\frac{(m^2-1)(4\,m^2-1)}{180\,m^4} \\
\mathfrak{D}_4 &= \frac{(m^2-1)(7\,m^2-3)}{480\,m^4} \\
\mathfrak{D}_5 &= -\frac{(m^2-1)(107\,m^4-61\,m^2+2)}{10\,080\,m^6}
\end{aligned} \qquad (171)$$

---

5. Reihenentwicklungen zu Fall VII.

Die Formeln (128) bis (131) lassen sich mit Verwendung der Gleichungen (145) bis (147) wie folgt umformen:

$$g = -\frac{i^4}{6}\left[3\,\psi_1'' + (1+i)\,\psi_1'''\right] \tag{172}$$

$$k = \psi_1 - (1+i)\,\psi_1' - \left(1+3\,i+\frac{5}{2}\,i^2\right)\psi_1'' - \left(\frac{1}{3}\,i+\frac{5}{6}\,i^2+\frac{1}{2}\,i^3\right)\psi_1''' \tag{173}$$

$$u_{(-1)} = -\left[2\,\psi_1' + (1+2\,i)\,\psi_1'' + \left(\frac{i}{3}+\frac{i^2}{3}\right)\psi_1'''\right. \tag{174}$$

$$u_{(+1)} = (1+i)^4\left(\psi_1'' + \frac{1}{3}\,i\,\psi_1'''\right) \tag{175}$$

Auf Grund der Darstellung (150) ergeben sich folgende Reihen:

$$\psi_1 = \frac{1}{i} + B_1 + B_2\,i + B_3\,i^2 + B_4\,i^3 + B_5\,i^4 \tag{176}$$

$$\psi_1' = -\frac{1}{i^2} + 0 + B_2 + 2\,B_3\,i + 3\,B_4\,i^2 + 4\,B_5\,i^3 \tag{177}$$

$$\psi_1'' = \frac{2}{i^3} + 0 + 0 + 2\,B_3 + 6\,B_4\,i + 12\,B_5\,i^2 \tag{178}$$

$$\psi_1''' = -\frac{6}{i^4} + 0 + 0 + 0 + 6\,B_4 + 24\,B_5\,i \tag{179}$$

Die in diesen Reihen auftretenden Koeffizienten B_1, B_2, B_3... werden durch die Gleichungen (152) dargestellt.

Durch Einsetzen der Reihen (176) bis (179) in die Formeln (172) bis (175) ergeben sich die gesuchten Reihendarstellungen der Funktionen g, k, $u_{(-1)}$, $u_{(+1)}$.

Die Koeffizienten E_0, E_1, E_2... der Reihendarstellung

$$g = E_0 + E_1\,i + E_2\,i^2 + E_3\,i^3 + \cdots\cdots \tag{180}$$

lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} E_0 &= 1 \\ E_1 &= 0 \\ E_2 &= 0 \\ E_3 &= 0 \end{aligned} \tag{181}$$

$$E_4 = -(B_3 + B_4) = -\frac{(m^2-1)(11m^2+1)}{720\,m^4}$$

$$E_5 = -4(B_4 + B_5) = \frac{(m^2-1)(11m^2+1)}{360\,m^4} \qquad (181)$$

$$E_s = -\frac{(s-1)(s-2)(s-3)}{6}(B_{s-1} + B_s)$$

T. B. Sprague teilt im "Journal of the Institute of Actuaries" Band XIII, Seite 214 für g die Reihe mit: $g = 1 + \frac{5}{6}\frac{(2m+1)(m+1)^2}{m^3} i^3 + \cdots\cdots$ Diese Angabe ist unrichtig. Die Unrichtigkeit wird verschuldet durch einen Rechnungsfehler in der zweiten Zeile von Seite 213, wo es $\frac{(t+1)(m+1)(2m+1)}{6}$ statt $\frac{(t+1)(m+1)(2m+1)}{12}$ heißen sollte.

Die Koeffizienten F_0, F_1, F_2, F_3 ... der Reihendarstellung

$$k = F_0 + F_1 i + F_2 i^2 + F_3 i^3 + \cdots\cdots \qquad (182)$$

lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}
&= (B_1 - B_2 - 2B_3) &&= \frac{m-1}{2m}\\
&= -(8B_3 + 8B_4) &&= -\frac{(m^2-1)(11m^2+1)}{90\,m^4}\\
&= -(6B_3 + 26B_4 + 20B_5) &&= \frac{(m^2-1)(11m^2+1)}{180\,m^4}\\
&= -(20B_4 + 60B_5 + 40B_6) &&= -\frac{(m^2-1)(20m^4-m^2-1)}{756\,m^6}\\
&= -(45B_5 + 115B_6 + 70B_7) &&= \frac{(m^2-1)(3m^4-11m^2-4)}{2016\,m^6}\\
&= -(84B_6 + 196B_7 + 112B_8) &&= \frac{(m^2-1)(1201m^6+481m^4+124m^2-6)}{64\,800\,m^8}
\end{aligned} \qquad (183)$$

(wie F_4 positiv.)

$$\left\{\begin{aligned}
&B_{s+1}\left[1 - s - \frac{5}{2}s(s-1) - \frac{1}{2}s(s-1)(s-2)\right]\\
&-B_{s+2}\left[(s+1) + 3(s+1)s + \frac{5}{6}(s+1)s(s-1)\right]\\
&-B_{s+3}\left[(s+2)(s+1) + \frac{1}{3}(s+2)(s+1)s\right]
\end{aligned}\right\}$$

Die Koeffizienten G_0, G_1, G_2, $G_3 \ldots$ der Reihendarstellung:

$$u_{(-i)} = G_0 + G_1 i + G_2 i^2 + G_3 i^3 + \cdots\cdots \tag{184}$$

lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}
G_0 &= -2(B_2 + B_3) &&= \frac{m^2-1}{12\,m^2} \\
G_1 &= -8(B_3 + B_4) &&= -\frac{(m^2-1)(11\,m^2+1)}{90\,m^4} \\
G_2 &= -20(B_4 + B_5) &&= \frac{(m^2-1)(11\,m^2+1)}{72\,m^4} \\
G_3 &= -40(B_5 + B_6) &&= -\frac{(m^2-1)(271\,m^4+19\,m^2-2)}{1512\,m^6} \\
G_4 &= -70(B_6 + B_7) &&= \frac{(m^2-1)(117\,m^4+5\,m^2-2)}{576\,m^6} \\
G_5 &= -112(B_7 + B_8) &&= -\frac{(m^2-1)(7297\,m^6+97\,m^4-197\,m^2+3)}{32\,400\,m^8}
\end{aligned} \tag{185}$$

$$G_s = \left\{ \begin{array}{l} -B_{s+2}\left[2(s+1) + 2(s+1)s + \frac{1}{3}(s+1)s(s-1)\right] \\ -B_{s+3}\left[(s+2)(s+1) + \frac{1}{3}(s+2)(s+1)s\right] \end{array} \right\}$$

Mit Verwendung der Abkürzung:

$$\bar{u}_{(+1)} = \psi_1'' + \frac{1}{3} i\, \psi_1''' \tag{186}$$

kann die Formel (175) wie folgt geschrieben werden:

$$u_{(+1)} = (1+i)^4\, \bar{u}_{(+1)} \tag{187}$$

Um möglichst einfache Koeffizienten zu erhalten, wird im Folgenden statt der Funktion $u_{(+1)}$ die Funktion $\bar{u}_{(+1)}$ in eine Reihe entwickelt.

Die Koeffizienten H_0, H_1, H_2, $H_3 \ldots$ der Reihendarstellung:

$$\bar{u}_{(+1)} = H_0 + H_1 i + H_2 i^2 + H_3 i^3 + \cdots\cdots \tag{188}$$

lauten wie folgt:

$$H_0 = 2\,B_3 = \frac{m^2-1}{12\,m^2}$$

$$H_1 = 8\,B_4 = -\frac{(m^2-1)(19\,m^2-1)}{90\,m^4}$$

$$H_2 = 20\,B_5 = \frac{(m^2-1)(9\,m^2-1)}{24\,m^4}$$

$$H_3 = 40\,B_6 = -\frac{(m^2-1)(863\,m^4-145\,m^2+2)}{1512\,m^6} \qquad (189)$$

$$H_4 = 70\,B_7 = \frac{(m^2-1)(2750\,m^4-610\,m^2+20)}{3456\,m^6}$$

$$H_5 = 112\,B_8 = -\frac{(m^2-1)(33\,953\,m^6-9\,247\,m^4+497\,m^2-3)}{32\,400\,m^8}$$

$$H_s = B_{s+3}\cdot(s+2)(s+1)(1+\frac{1}{3}s)$$

Auf Grund der Formel (132)

$$\mathfrak{k} = k - g + \frac{1}{m}$$

ergibt sich auch für $\mathfrak{k}$ eine Reihendarstellung.

Die Koeffizienten $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3 \cdots$ der Reihe:

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}_1 i + \mathfrak{F}_2 i^2 + \mathfrak{F}_3 i^3 + \cdots \qquad (190)$$

lauten wie folgt:

$$\mathfrak{F}_0 = -\frac{m-1}{2\,m}$$

$$\mathfrak{F}_1 = -\frac{(m^2-1)(11\,m^2+1)}{90\,m^4}$$

$$\mathfrak{F}_2 = +\frac{(m^2-1)(11\,m^2+1)}{180\,m^4}$$

$$\mathfrak{F}_3 = -\frac{(m^2-1)(20\,m^4-m^2-1)}{756\,m^6} \qquad (191)$$

$$\mathfrak{F}_4 = +\frac{(m^2-1)(169\,m^4-41\,m^2-20)}{10\,080\,m^6}$$

$$\mathfrak{F}_5 = -\frac{(m^2-1)(779\,m^6-301\,m^4-124\,m^2+6)}{64\,800\,m^8}$$

Abschnitt F.

Tabellen.

Tabelle a: Funktionswerte zum Fall III.

Vergleiche die Formeln (25) der Abschnitte A und B, sowie die Reihendarstellungen 158—159, 165—166 und 170—171 des Abschnittes E.

$100\,i$	g	k	t
		$m = 2$	
3,00	1,000 0546	0,246 332	— 0,253 722
3,25	1,000 0639	0,246 034	— 0,254 030
3,50	1,000 0740	0,245 737	— 0,254 337
3,75	1,000 0847	0,245 440	— 0,254 644
4,00	1,000 0961	0,245 145	— 0,254 951
4,25	1,000 1083	0,244 851	— 0,255 257
4,50	1,000 1211	0,244 558	— 0,255 563
4,75	1,000 1346	0,244 266	— 0,255 869
5,00	1,000 1488	0,243 975	— 0,256 174
5,25	1,000 1636	0,243 685	— 0,256 479
5,50	1,000 1792	0,243 396	— 0,256 783
5,75	1,000 1954	0,243 108	— 0,257 087
6,00	1,000 2122	0,242 821	— 0,257 391
		$m = 4$	
3,00	1,000 0683	0,370 415	— 0,379 653
3,25	1,000 0799	0,370 042	— 0,380 038
3,50	1,000 0925	0,369 671	— 0,380 422
3,75	1,000 1059	0,369 300	— 0,380 806
4,00	1,000 1202	0,368 931	— 0,381 189
4,25	1,000 1353	0,368 564	— 0,381 572
4,50	1,000 1514	0,368 197	— 0,381 954
4,75	1,000 1683	0,367 832	— 0,382 336
5,00	1,000 1860	0,367 469	— 0,382 717
5,25	1,000 2046	0,367 106	— 0,383 098
5,50	1,000 2240	0,366 745	— 0,383 479
5,75	1,000 2442	0,366 385	— 0,383 859
6,00	1,000 2653	0,366 027	— 0,384 239

Tabelle a: Funktionswerte zum Fall III.

Vergleiche die Formeln (25) der Abschnitte A und B, sowie die Reihendarstellungen 158—159, 165—166 und 170—171 des Abschnittes E.

$100\,i$	g	k	$\mathfrak{k}$
		$m = 12$	
3,00	1,000 0723	0,453 477	— 0,463 262
3,25	1,000 0847	9,453 082	— 0,463 669
3,50	1,000 0979	0,452 688	— 0,464 076
3,75	1,000 1122	0,452 296	— 0,464 483
4,00	1,000 1273	0,451 905	— 0,464 889
4,25	1,000 1434	0,451 516	— 0,465 294
4,50	1,000 1603	0,451 128	— 0,465 699
4,75	1,000 1781	0,450 741	— 0,466 104
5,00	1,000 1970	0,450 356	— 0,466 508
5,25	1,000 2167	0,449 972	— 0,466 912
5,50	1,000 2372	0,449 589	— 0,467 315
5,75	1,000 2587	0,449 208	— 0,467 717
6,00	1,000 2810	0,448 828	— 0,468 120
		$m = \infty$	
3,00	1,000 0728	0,495 110	— 0,504 963
3,25	1,000 0852	0,494 712	— 0,505 373
3,50	1,000 0986	0,494 315	— 0,505 783
3,75	1,000 1129	0,493 920	— 0,506 193
4,00	1,000 1282	0,493 527	— 0,506 601
4,25	1,000 1444	0,493 135	— 0,507 010
4,50	1,000 1615	0,492 744	— 0,507 418
4,75	1,000 1795	0,492 354	— 0,507 825
5,00	1,000 1984	0,491 966	— 0,508 232
5,25	1,000 2182	0,491 580	— 0,508,638
5,50	1,000 2389	0,491 195	— 0,509 044
5,75	1,000 2605	0,490 811	— 0,509 450
6,00	1,000 2830	0,490 428	— 0,509 855

Tabelle b: Funktionswerte zum Fall VII.

Vergleiche die Formeln (74) bis (79) der Abschnitte A und B, sowie die Reihendarstellungen (180) bis (191) des Abschnittes E.

$100\,i$	g	k	$u_{(-1)}$	$u_{(+1)}$	t
			$m = 2$		
3,00	1,000 000 0	0,247 229	0,059 789	0,065 333	— 0,252 771
3,25	1,000 000 0	0,247 002	0,059 572	0,065 571	— 0,252 998
3,50	1,000 000 0	0,246 775	0,059 357	0,065 810	— 0,253 225
3,75	1,000 000 0	0,246 549	0,059 142	0,066 048	— 0,253 451
4,00	1,000 000 0	0,246 324	0,058 929	0,066 287	— 0,253 676
4,25	1,000 000 0	0,246 099	0,058 717	0,066 526	— 0,253 901
4,50	1,000 000 0	0,245 874	0,058 507	0,066 766	— 0,254 126
4,75	0,999 999 9	0,245 651	0,058 297	0,067 006	— 0,254 349
5,00	0,999 999 9	0,245 427	0,058 089	0,067 246	— 0,254 573
5,25	0,999 999 9	0,245 205	0,057 882	0,067 486	— 0,254 795
5,50	0,999 999 9	0,244 982	0,057 677	0,067 726	— 0,255 018
5,75	0,999 999 9	0,244 761	0,057 472	0,067 967	— 0,255 239
6,00	0,999 999 9	0,244 540	0,057 269	0,068 208	— 0,255 460
			$m = 4$		
3,00	1,000 000 0	0,371 594	0,074 793	0,081 608	— 0,378 406
3,25	1,000 000 0	0,371 315	0,074 526	0,081 900	— 0,378 685
3,50	1,000 000 0	0,371 036	0,074 261	0,082 193	— 0,378 964
3,75	1,000 000 0	0,370 758	0,073 998	0,082 487	— 0,379 242
4,00	1,000 000 0	0,370 481	0,073 736	0,082 780	— 0,379 519
4,25	1,000 000 0	0,370 205	0,073 475	0,083 074	— 0,379 795
4,50	0,999 999 9	0,369 929	0,073 217	0,083 369	— 0,380 071
4,75	0,999 999 9	0,369 654	0,072 959	0,083 663	— 0,380 346
5,00	0,999 999 9	0,369 379	0,072 703	0,083 958	— 0,380 621
5,25	0,999 999 9	0,369 105	0,072 449	0,084 254	— 0,380 894
5,50	0,999 999 9	0,368 832	0,072 196	0,084 549	— 0,381 168
5,75	0,999 999 9	0,368 560	0,071 945	0,084 845	— 0,381 440
6,00	0,999 999 8	0,368 288	0,071 695	0,085 142	— 0,381 712

Tabelle b: Funktionswerte zum Fall VII.

Vergleiche die Formeln (74) bis (79) der Abschnitte A und B, sowie die Reihendarstellungen (180) bis (191) des Abschnittes E.

$100\,i$	g	k	$u_{(-1)}$	$u_{(+1)}$	$\mathfrak{k}$
			$m = 12$		
3,00	1,000 000 0	0,454 744	0,079 243	0,086 425	— 0,461 923
3,25	1,000 000 0	0,454 449	0,078 962	0,086 734	— 0,462 217
3,50	1,000 000 0	0,454 156	0,078 683	0,087 042	— 0,462 511
3,75	1,000 000 0	0,453 863	0,078 405	0,087 351	— 0,462 804
4,00	1,000 000 0	0,453 571	0,078 129	0,087 661	— 0,463 096
4,25	1,000 000 0	0,453 279	0,077 854	0,087 971	— 0,463 387
4,50	0,999 999 9	0,452 989	0,077 581	0,088 281	— 0,463 678
4,75	0,999 999 9	0,452 699	0,077 310	0,088 592	— 0,463 968
5,00	0,999 999 9	0,452 409	0,077 041	0,088 903	— 0,464 257
5,25	0,999 999 9	0,452 121	0,076 773	0,089 214	— 0,464 546
5,50	0,999 999 9	0,451 833	0,076 506	0,089 526	— 0,464 834
5,75	0,999 999 9	0,451 546	0,076 241	0,089 838	— 0,465 121
6,00	0,999 999 8	0,451 259	0,075 978	0,090 150	— 0,465 407
			$m = \infty$		
3,00	1,000 000 0	0,496 388	0,079 799	0,087 027	— 0,503 612
3,25	1,000 000 0	0,496 091	0,079 517	0,087 338	— 0,503 909
3,50	1,000 000 0	0,495 796	0,079 235	0,087 648	— 0,504 204
3,75	1,000 000 0	0,495 501	0,078 956	0,087 959	— 0,504 499
4,00	1,000 000 0	0,495 207	0,078 678	0,088 271	— 0,504 793
4,25	1,000 000 0	0,494 914	0,078 402	0,088 583	— 0,505 086
4,50	0,999 999 9	0,494 621	0,078 127	0,088 894	— 0,505 379
4,75	0,999 999 9	0,494 330	0,077 854	0,089 207	— 0,505 670
5,00	0,999 999 9	0,494 038	0,077 583	0,089 520	— 0,505 962
5,25	0,999 999 9	0,493 748	0,077 313	0,089 834	— 0,506 252
5,50	0,999 999 9	0,493 458	0,077 045	0,090 147	— 0,506 542
5,75	0,999 999 9	0,493 169	0,076 779	0,090 461	— 0,506 831
6,00	0,999 999 8	0,492 881	0,076 514	0,090 776	— 0,507 119

Tabelle c: Zahlenbeispiele zu den Formeln im Abschnitt B für den Barwert der vierteljährlich, vorschußweise, lebenslänglich zahlbaren Leibrente vom Jahresbetrag 1.

Grundlagen: Sterbetafel R F (Rentiers Français). Zinsfuß $3\frac{1}{2}\%$.

	Barwert $^{(4)}a_x$ für die Alter			
	$x = 30$	$x = 50$	$x = 70$	$x = 90$
Fall I	19,799 87	14,671 21	7,760 26	2,496 63
II **)	(19,798 13)	(14,668 52)	(7,756 29)	(2,491 69)
III	19,796 31	14,667 18	7,755 59	2,491 47
IV	**19,796 66**	**14,667 54**	**7,753 50**	**2,468 98**
V	**19,796 66**	**14,667 54**	**7,753 50**	**2,468 79**
VI **)	(19,798 48)	(14,668 89)	(7,754 20)	(2,469 16)
VII	**19,796 66**	**14,667 54**	**7,753 50**	**2,468 94**
genaue Rechnung*)	19,796 66	14,667 54	7,753 50	2,469 00

*) Die Sterbetafel R F ist bekanntlich vom Alter 25 ab nach der analytischen Formel von Makeham ausgeglichen. Auf Grund der gegebenen Konstanten der Makeham'schen Formel und mit Verwendung der Exponentialmethode der Verzinsung wurden die $D_{x+1/4}$, $D_{x+2/4}$, $D_{x+3/4}$, $^{(4)}\mathfrak{D}_x$, $^{(4)}\mathfrak{N}_x$ und schließlich der Barwert $^{(4)}a_x$ genau berechnet. Als Vergleichszahlen zu den übrigen Zahlenbeispielen sind die Ergebnisse der genauen Rechnung von einem besonderen Interesse.

**) In den Fällen II und VI werden Zins und Diskont für den Burchteil eines Jahres nach der Methode der einfachen Verzinsung berechnet. Die auf dieser Grundlage berechneten Zahlenwerte sind in der vorstehenden Tabelle eingeklammert, womit angedeutet werden soll, daß sie mit den übrigen Zahlenwerten nicht ohne weiteres verglichen werden können.

In den Fällen IV, V und VII wurde die Parabel dritten Grades als Hilfskurve zur Herleitung der Formeln verwendet. Es ist bemerkenswert, wie gut im allgemeinen die Zahlenwerte in diesen drei Fällen mit den Zahlenwerten der genauen Rechnung übereinstimmen; Abweichungen in der vierten Dezimale treten erst bei einem Alter von gegen 90 Jahren auf.

Literaturverzeichnis.

1. G. Bohlmann: Lebensversicherungs-Mathematik, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.
2. H. Broggi: Versicherungsmathematik.
3. Institute of Actuaries' Text Book. Part I (Interest). Part II (Life Annuities and Assurances).
4. N. R. Jörgensen: Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung.
5. C. Landré: Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung.
6. Prof. Dr. Chr. Moser: Über den Barwert der in unterjährigen Raten zahlbaren Leibrenten. (Vorlesung vom Sommer 1916.)
7. E. Pascal: Repetitorium der höheren Mathematik, I. Teil, Kapitel IX, Differenzenrechnung.
8. Th. B. Sprague: On the Value of Annuities payable Halfyearly, Quarterly etc., The Assurance Magazine and Journal of the Institute of Actuaries, Vol. XIII, 1867.